



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2024/2025, 2. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovala Timea Jakubócyová)

Pozrieme sa najskôr na prvú otázku, ktorá sa týka rovných čísel. Zaujímajú nás len rovné čísla, v ktorých sa neopakujú cifry. Keďže máme tri rovné cifry 1, 4 a 7, môžeme vytvoriť najviac trojciferné rovné číslo, v ktorom sa neopakujú cifry. Pozrime sa teda na všetky jednociferné, dvojciferné a trojciferné rovné čísla bez opakovania cifier, ktoré môžeme vytvoriť:

- jednociferné: 1, 4, 7
- dvojciferné: 14, 17, 47
- trojciferné: 147, 174, 417, 471, 714, 741

Teraz potrebujeme z týchto rovných čísel vybrať tie, ktoré sú deliteľné tromi. Vieme, že číslo je deliteľné tromi, pokiaľ je jeho ciferný súčet deliteľný tromi. Žiadne z čísel 1, 4 a 7 nie sú deliteľné tromi. Ďalej čísla $1 + 4 = 5$, $1 + 7 = 8$ a $4 + 7 = 11$ nie sú deliteľné tromi. Takže ani čísla 14, 17 a 47 nie sú deliteľné tromi. Nakoniec číslo $1 + 4 + 7 = 12$ je deliteľné tromi. Takže všetky trojciferné rovné čísla, ktoré sú vypísané vyššie, sú deliteľné tromi.

Spolu máme 6 rovných trojciferných čísel, ktoré sú deliteľné tromi a neopakujú sa v nich cifry.

Teraz sa pozrieme na druhú otázku, ktorá sa týka oblých čísel. Vieme, že číslo je deliteľné deviatimi, pokiaľ jeho ciferný súčet je deliteľný deviatimi. Je dôležité si uvedomiť, že ciferný súčet sa nám nezmení, ak zmeníme poradie cifier v čísle. Takže namiesto toho, aby sme skúmali všetky možné 4-ciferné oblé čísla, stačí skúmať štvorice oblých cifier. Najjednoduchšie, čo vieme spraviť, je vypísať si všetky možné kombinácie štyroch oblých cifier bez opakovania a zistiť, ktorá z týchto kombinácií má súčet deliteľný deviatimi. Tento postup je úplne správny. Ukážeme si ešte ale iný postup, ktorým sa dalo vyhnúť vypisovaniu všetkých možných štvoric a počítaniu ich súčtov.

Hľadáme štvorice rôznych oblých cifier, ktorých súčet je deliteľný deviatimi. Súčet všetkých oblých cifier je 33. Takže ak sčítame nejaké štyri rôzne oblé cifry, môžeme dostať len tieto násobky čísla deväť: 9, 18 alebo 27. Keď sčítame štyri najmenšie oblé cifry, dostaneme $0 + 2 + 3 + 5 = 10$. Takže nemôže existovať štvorica oblých cifier so súčtom 9. Keď sčítame štyri najväčšie oblé cifry, dostaneme $9 + 8 + 6 + 5 = 28$. Druhý najväčší súčet štyroch oblých cifier, ktorý môžeme dostať, je $9 + 8 + 6 + 3 = 26$. Všetky ostatné štvorice oblých cifier budú mať menší súčet. Takže nemôže existovať ani štvorica oblých cifier so súčtom 27. Zostáva nám teda hľadať štvorice oblých cifier so súčtom 18. Pokiaľ vo štvorici oblých cifier nepoužijeme cifru 9 ani cifru 8, najväčší súčet, ktorý môžeme vytvoriť pomocou štyroch oblých cifier, je $6 + 5 + 3 + 2 = 16$. To znamená, že každá štvorica oblých cifier so súčtom 18 musí obsahovať cifru 8 alebo cifru 9.

Najskôr zistíme, či existuje nejaká vyhovujúca štvorica, ktorá obsahuje cifru 9. Ak ku cifre 9 pridáme cifru 8, súčet zvyšných dvoch cifier musí byť 1. Ale súčet 1 nevieme vytvoriť z dvoch oblých cifier. Ak ku cifre 9 pridáme cifru 6, súčet dvoch zvyšných cifier musí byť 3. Ľahko overíme, že jediný spôsob, ako vieme vytvoriť súčet 3 pomocou dvoch oblých cifier, je použitím cifier 3 a 0. **Dostávame teda prvú vyhovujúcu štvoricu 9, 6, 3, 0.**

Ak ku cifre 9 pridáme cifru 5, súčet zvyšných dvoch cifier musí byť 4. Ľahko overíme, že súčet 4 nevieme vytvoriť pomocou dvoch oblých cifier. Ak ku cifre 9 nepridáme žiadnu z cifier 8, 6 alebo 5, máme už len jednu možnosť a to štvoricu 9, 3, 2, 0. Táto štvorica ale nemá súčet 18.

Teraz zistíme, či existuje štvorica, ktorá neobsahuje cifru 9 a obsahuje cifru 8. Ak ku cifre 8 pridáme cifru 6, súčet zvyšných dvoch cifier musí byť 4. Ale súčet 4 nevieme vytvoriť pomocou dvoch oblých cifier. Ak ku cifre 8 pridáme cifru 5, súčet zvyšných dvoch cifier musí byť 5. A súčet 5 vieme pomocou dvoch oblých cifier vytvoriť len dvoma spôsobmi. Pomocou cifier 5 a 0 alebo pomocou cifier 3 a 2. Keďže sa cifry nemôžu opakovať, vyhovuje nám len možnosť 3 a 2. **Máme teda druhú vyhovujúcu štvoricu 8, 5, 3, 2.**

Ak ku cifre 8 nepridáme žiadnu z cifier 9, 6 alebo 5, máme už len jednu možnosť a to štvoricu 8, 3, 2, 0. Táto štvorica ale nemá súčet 18.

Takže máme dve štvorice obľých cifier, ktorých súčet je 18. Sú to 9, 6, 3, 0 a 8, 5, 3, 2. Teraz potrebujeme zistiť, koľko rôznych čísel vieme z týchto dvoch štvoríc obľých cifier poskladať. Inak povedané, koľkými spôsobmi vieme poprehadzovať cifry v týchto dvoch štvoriciach. V prípade štvorice 8, 5, 3, 2 vieme poskladať $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ rôznych obľých čísel. V prípade štvorice 9, 6, 3, 0 vieme poskladať len $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ rôznych obľých čísel, pretože číslo nemôže začínať cifrou 0.

Spolu máme $24 + 18 = 42$ rôznych obľých 4-ciferných čísel, ktoré sú deliteľné deviatimi a neopakujú sa v nich cifry.

Úloha č. 2 (opravovala Denisa Múthová)

Máme za úlohu zistiť, akú vzdialenosť smerom na východ, a akú vzdialenosť smerom na sever museli prejsť deti od radnice, aby našli poklad zakopaný Willym a Suzy.

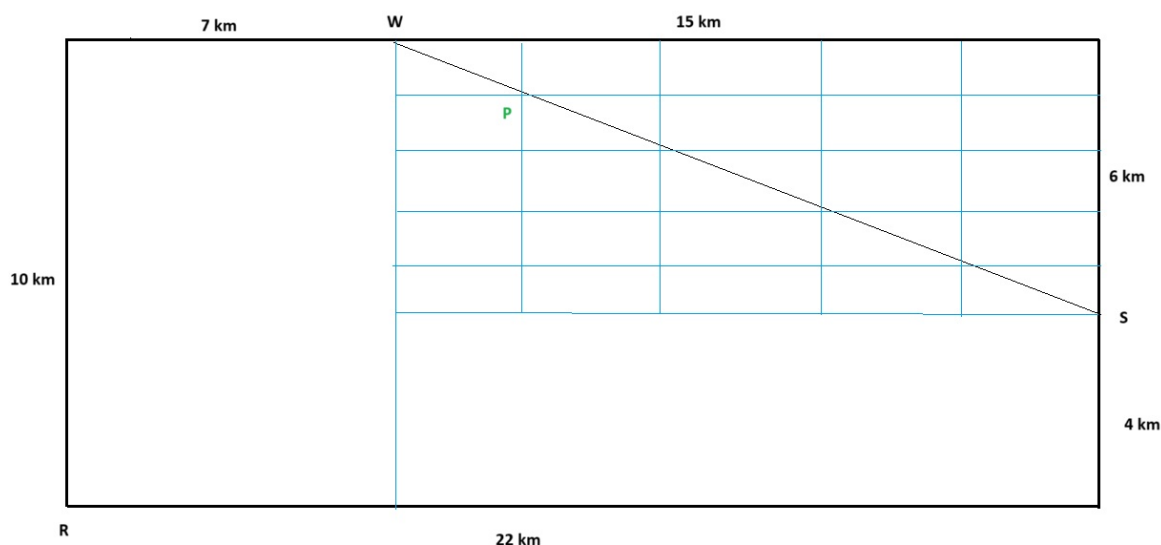
Nakreslíme si obrázok, a vyznačíme si, čo vieme (čiernou farbou). Willy ide od radnice (ozname si ju písmenom R) 10 km na sever, a potom 7 km na východ (bod W). Suzy ide od R najskôr 22 km na východ, a potom 4 km na sever (bod S). Keď pôjde Willy ešte 15 km na východ, a Suzy ešte 6 km na sever, tak sa stretnú v jednom bode a vznikne obdĺžnik.

Na druhý deň vyrazia Suzy a Willy presne v rovnakom čase priamo proti sebe, W kráča 4-krát pomalšie ako Suzy, teda ak Willy prejde napríklad 1 km, Suzy prejde 4 km, dokopy 5 km. Willy teda prejde $1/5$ cesty a Suzy prejde $4/5$ cesty. A tam zakopú poklad (bod P vyznačený zelenou farbou). Modrou farbou si vyznačíme menší obdĺžnik, ktorý nám vznikne vo veľkom obdĺžniku. Menší obdĺžnik si rozdelíme vodorovne aj zvisle na 5 častí, teda 15 km na 5 častí po 3 km, a 6 km na 5 častí po 1,2 km.

Aby sa Willy dostal k pokladu P, prejde 7 km prvý deň smerom na východ a druhý deň ešte $1/5$ z 15 km, teda 3 km smerom na východ, čo je dokopy 10 km. Suzy prejde prvý deň 4 km smerom na sever a druhý deň $4/5$ zo 6 km, teda 4,8 km, tiež smerom na sever, teda dokopy 8,8 km smerom na sever k pokladu P.

To nám dáva aj odpoveď na našu úlohu:

Deti prešli 10 km na východ a 8,8 km na sever, aby sa dostali k pokladu.



Úloha sa samozrejme dala riešiť viacerými spôsobmi (napríklad cez podobnosť trojuholníkov). Vzorové riešenie však opisuje vaše najčastejšie riešenie.

Úloha č. 3 (opravovala Betka Bohiniková)

Najprv si rozpíšeme, aké rôzne hody nám môžu padnúť. Najjednoduchšie je rozpísať si to do tabuľky:

		Kocka 1					
		1	2	3	4	7	9
Kocka 2	1	2	3	4	5	8	10
	2	3	4	5	6	9	11
	3	4	5	6	7	10	12
	4	5	6	7	8	11	13
	7	8	9	10	11	14	16
	9	10	11	12	13	16	18

Z tabuľky vidíme, že 20 z 36 možných hodov je párnych a zvyšných 16 je nepárnych. Keďže predpokladáme že sú kocky spravodlivé, očakávame že každé číslo padne rovnako často. Takisto potom očakávame že ľubovoľná z kombinácií hodov má rovnakú šancu. Potom pravdepodobnosť párneho hodu je $20/36$ a nepárneho $16/36$.

Pri sto hodoch tak očakávame $100 \cdot 20 : 36 = 56$ párnych (zaokrúhlené na celé čísla) a 44 nepárnych hodov.

Samozrejme, ak si vyskúšame hodiť týchto 100 hodov, nemusíme vždy dostať 56 párnych. Avšak očakávame, že ak by sme to skúsili veľmi veľa krát, najčastejšie dostaneme tých 56 párnych hodov.

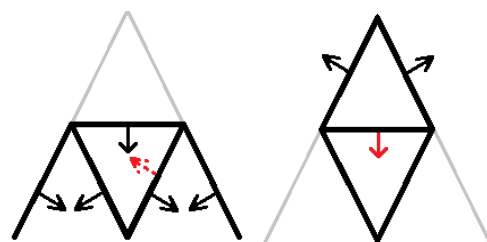
Úloha č. 4 (opravovala Vierka Glevitzká)

Suzy sa páčia domčeky, ktoré majú v každom trojuholníku rovnako veľa kariet otočených lícom dovnútra. Koľko ale takýchto kariet môže byť?

Keď máme iba jednoposchodový domček, tak sa skladá iba z jedného trojuholníka. Hocijako ho teda postavíme, vždy bude vo všetkých trojuholníkoch rovnaký počet kariet otočených lícom dovnútra, lebo máme iba jeden trojuholník. Zaujímavé sú preto domčeky, ktoré majú aspoň dve poschodia.

V spodných trojuholníkoch môžu byť najviac dve karty otočené lícom dovnútra, keďže tretiu stranu tvorí stôl (ďalej ich budem volať dvoj-kartové trojuholníky). V trojuholníkoch teda môžu byť 0 až 2 karty otočené lícom dovnútra.

Dvojposchodový domček nevieme postaviť tak, aby v každom trojuholníku nebola ani jedna karta otočená lícom dovnútra. Každý trojuholník má aspoň jednu kartu spoločnú s nejakým iným trojuholníkom. Bez ohľadu na to, ako túto kartu otočíme, do jedného z týchto trojuholníkov bude otočená lícom dovnútra. Teda vždy bude existovať trojuholník, v ktorom je aspoň jedna otočená do jeho vnútra. To isté platí aj pre viac poschodové domčeky (šípky označujú, ktorým smerom je otočené líce karty).



Čo ak by sme chceli mať v každom trojuholníku práve dve karty otočené lícom smerom dovnútra? V dvoj-kartových trojuholníkoch potom musia byť obe karty otočené lícom dovnútra. Trojuholníky, ktoré sú

medzi nimi a sú susedné s dvomi z nich ale budú mať už dve karty otočené lícom smerom von. Preto nemôžu mať dve karty (z troch) otočené lícom dovnútra. Toto platí aj pre väčšie domčeky aj keď na obrázku je iba dvojposchodový domček.

Posledná možnosť je, že v každom trojuholníku bude práve jedna karta otočená lícom dovnútra. Skúsme takéto domčeky začať stavať (alebo skôr kresliť). Začnime od vrchu. Vo vrchnom trojuholníku máme na výber z troch kariet, z ktorých jedna bude otočená lícom dovnútra. Jednu z nich si vyberieme a pokračujeme v dokresľovaní šípok. Akonáhle je v nejakom trojuholníku už otočená jedna karta lícom dovnútra, zvyšné karty v ňom už musia byť otočené lícom smerom von z trojuholníka. Ak sa nám teda v nejakom trojuholníku objaví šípka dovnútra, z ostatných strán musia ísť šípky von z neho. Na obrázku môžeme vidieť, ako by vyzeralo dokresľovanie. V niektorých trojuholníkoch sme sa mohli rozhodnúť, či dáme šípku na pravú alebo ľavú stranu. Keby sme sa rozhodli inak ako v postupe na obrázku, tak dostaneme iba zrkadlovo obrátené riešenie.

Horný trojuholník má iba 3 možnosti, ako môže na začiatku vyzerieť. Všetky ostatné orientácie kariet boli vynútené predošlými (modré trojuholníky), až na dve miesta, kde sme sa mohli rozhodnúť (žlté trojuholníky). Preto neexistujú už žiadne iné možnosti, ako by sa dal postaviť domček s práve jednou kartou otočenou lícom dovnútra v každom trojuholníku.

Preto sa tiež nedá postaviť domček so štyrmi poschodiami. Domček so štyrmi poschodiami je aj súčasťou každého ďalšieho väčšieho domčeka. Preto sa ani žiaden väčší už nebude dať postaviť.

Domčeky, ktoré sa páčia Suzy, môžu mať iba jedno, dve alebo tri poschodia.

