**JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU**
**XIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky**
**pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG**

# S E Z A M K O, Školský rok 2024/2025, 1. letná séria
# Vzorové riešenia

***Úloha č. 1*** *(opravoval Aďo Mrázik)*

Našou úlohou bolo vyriešiť hádanku kapitána a zistiť, pod ktorým z troch klobúkov v rade sa skrývala mušľa. Pre jasnosť si nazvime miesto, na ktorom je klobúk s predmetom úplne naľavo, ako prvá pozícia. Napravo od neho by bola druhá pozícia a ďalej napravo tretia pozícia. Každá pozícia má teda jeden klobúk a pod ním jeden predmet.

Kapitán nám prezradil štyri nápovedy, pomocou ktorých máme vyriešiť hádanku. Poďme sa pozrieť na prvú, ktorá hovorí: „Červený klobúk je naľavo od čierneho.“ Vieme, že naľavo od prvej pozície už žiadny klobúk nie je, a rovnako, že napravo od tretej pozície tiež žiadny klobúk nie je. Ak by predsa napravo od tretej pozície nejaký klobúk bol, tretia pozícia by nemala tretí klobúk v poradí – nebola by to vtedy tretia pozícia ale druhá. Táto nápoveda by teda znamenala, že červený klobúk nemôže byť na tretej pozícii, lebo musí mať napravo od seba čierny klobúk. Podobným spôsobom nemôže byt čierny klobúk na prvej pozícii.

Rovnakým spôsobom si prejdeme všetky nápovedy a zistíme toto:

- Červený klobúk nemôže byť na tretej pozícii.
- Čierny klobúk nemôže byť na prvej pozícii.
- Modry klobúk nemôže byť na prvej a ani na tretej pozícii.
- Kompas nemôže byť na tretej pozícii.
- Ďalekohľad nemôže byť na prvej pozícii.
- Mušľa nemôže byť na tretej pozícii.

Môžeme si teraz všimnúť, že modrý klobúk má iba jednu pozíciu, na ktorej môže byť, a teda na nej **musí** byť. **Modrý klobúk** je teda na **druhej pozícii**.

Mohli by sme podobným spôsobom vylučovania možností pokračovať, ale už nemusíme. Teraz už z pôvodných nápoved vieme presne zistiť, kde sa čo nachádza.

Poďme sa najskôr pozrieť na klobúky. Zostali nám dve pozície pre klobúky, prvá a tretia, a tiež z prvej nápovedy vieme, že červený klobúk je naľavo od čierneho. Jediná možnosť teda je, že **červený klobúk** je na **prvej pozícii** a **čierny klobúk** na **tretej pozícii**.

Zostávajú nám predmety. Druhá nápoveda nám negarantuje pozíciu žiadneho predmetu, ale tretia a štvrtá áno. Z tretej nápovedy vieme, že mušľa je naľavo od modrého klobúka. Keďže je modrý klobúk na druhej pozícii, máme iba jednu pozíciu naľavo od jeho pozície – tam sa skrýva mušľa. **Mušľa** je teda na **prvej pozícii**.

Štvrtá napovedá hovorí, že ďalekohľad je napravo od modrého klobúka. Znova existuje iba jedna pozícia napravo od pozície modrého klobúka – **ďalekohľad** je na **tretej pozícii**.

Zostal nám jeden predmet, kompas, a jeden prázdny klobúk, modrý. **Kompas** je na **druhej pozícii**, teda na pozícii modrého klobúka.

**Klobúky a predmety sú zoradené takto:**

- Prvá pozícia – červený klobúk a mušľa.
- Druhá pozícia – modrý klobúk a kompas.
- Tretia pozícia – čierny klobúk a ďalekohľad.

**Mušľa sa skrýva pod červeným klobúkom.**

***Úloha č. 2 (****opravovali Ajka Kucharíková a Daniel Ondovčík****)***

Našou úlohou bolo nájsť všetky možné dĺžky čiernych nití, keď vnútri obdĺžnikovej plachty musí byť 22 m bielej nite.

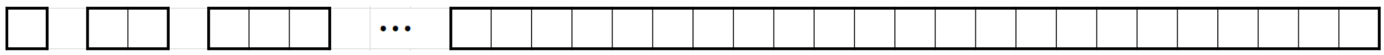
Keďže potrebujeme nájsť všetky riešenia, musíme si nájsť nejaký systém, aby sme mali istotu, že sme všetko skontrolovali:

Poďme si skúšať postupne všetky výšky plachty od 1 a vyššie. Najprv si dajme, nech má plachta výšku jedného štvorčeka a pridávajme 1 stĺpec do šírky:

- 1×1 štvorček -> vtedy má plachta 0 m bielej nite,
- 1×2 štvorčeky -> vtedy má plachta 1 m bielej nite,
- 1×3 štvorčeky -> vtedy má plachta 2 m bielej nite, atď…

S novým stĺpčekom pribudne 1 m bielej nite, čiže budeme potrebovať 23 štvorčekov

Všimli sme si, že čierna niť nám tvorí obvod obdĺžnikovej plachty, preto si ho aj vypočítame: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 23 = 48$ m čiernej nite.



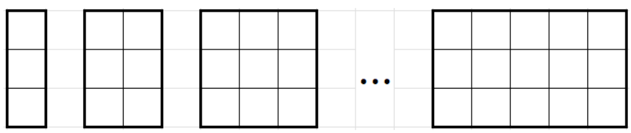
Potom nech má plachta výšku 2 štvorčeky a zase pridávajme 1 stĺpec do šírky:

- 2×1 štvorček -> vtedy má plachta 1 m bielej nite,
- 2×2 štvorčeky -> vtedy má plachta 4 m bielej nite,
- 2×3 štvorčeky -> vtedy má plachta 7 m bielej nite, atď…

S novým stĺpčekom pribudnú 3 m bielej nite, takto sa vieme dostať až k 2×8 štvorčekom. Vtedy má plachta 22 m bielej nite a podľa toho si dopočítame čiernu niť: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 20$ m čiernej nite.

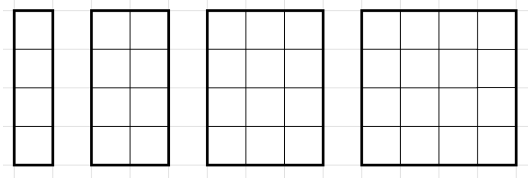
Potom nech má plachta výšku 3 štvorčeky a pridávajme 1 stĺpec do šírky:

- 3×1 štvorček -> vtedy má plachta 2 m bielej nite
- 3×2 štvorčeky -> vtedy má plachta 7 m bielej nite
- 3×3 štvorčeky -> vtedy má plachta 12 m bielej nite, atď…



S novým stĺpčekom pribudne 5 m bielej nite, až sa dostaneme k 3×5 štvorčekom. Vtedy má plachta 22 m bielej nite a dopočítame čiernu niť ako obvod plachty: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$ m čiernej nite.

Ďalej nech má plachta výšku 4 štvorčeky a pridávajme 1 stĺpec do šírky:



- 4×1 štvorček -> vtedy má plachta 3 m bielej nite
- 4×2 štvorčeky -> vtedy má plachta 10 m bielej nite
- 4×3 štvorčeky -> vtedy má plachta 17 m bielej nite
- 4×4 štvorčeky -> vtedy má plachta 24 m bielej nite.

Tu to nevychádza, lebo buď mám menej ako 22 m, alebo mám viac ako 22 m, preto 4 štvorčeky dlhá plachta nemôže byť.

Keď si vyskúšame plachtu vysokú 5 štvorčekov, nájdeme riešenie 5×3 a zistíme, že je to isté ako 3×5, len otočené. Tým pádom bude na ňu treba rovnaké množstvo čiernej nite, 16 m. Pokračujeme s výškou 6 štvorčekov, tu nám to nevyjde, rovnako ako pri výške 4, že nie je plachta, ktorá by mala vnútri 22 m bielej nite. Tým pádom bude na ňu treba rovnaké množstvo čiernej nite, 20 m. Podobne to dopadne aj so výškou 7 štvorčekov, tiež nejde. Pri výške 8, nájdeme riešenie 8×2, čo je rovnaké, ako pri výške 2, len otočené.

Takto môžeme pokračovať, alebo si môžeme všimnúť, že sa postupne zmenšuje šírka plachty, pri 5×3 je šírka 3, pri 8×2 je šírka 2 a ostáva nám už iba šírka 1, ktorú dostaneme keď otočíme prvé nájdené riešenie 1×23 na 23×1.

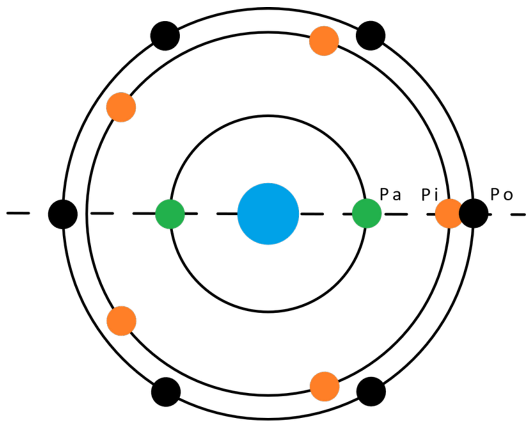
**Preto finálna odpoveď je 48m, 20 m, alebo 16 m čiernej nite.**

***Úloha č. 3*** *(opravovala Miška Rosinská)*

Ďalší Rovný sviatok nastane, keď všetky tri mesiace budú v tej istej polohe ako v roku 1491. To sa stane, keď každý mesiac dokončí vhodný počet obehov okolo Ťuk.

Vieme, že Pa obehne Ťuk za 2 roky, Pi za 5 rokov a Po za 6 rokov. Hľadáme teda najmenší spoločný násobok týchto čísel, čo je 30.

Za 30 rokov Pi obehne Ťuk 15 krát, Pi 6 krát a Po 5 krát, a bude sa oslavovať Rovný sviatok.




Pre Priamkový sviatok si môžeme si najprv nakresliť polohy mesiacov rok po roku. Ako vidíme na obrázku, je len jedna priamka, na ktorej sa mesiace môžu všetky ocitnúť.

Pi bude na tejto priamke každých 5 rokov, keď dokončí celý obeh planéty. Pa o Po môžu byť na priamke v 2 rôznych polohách, keď urobia celý obeh a aj v polovici ich cesty. Pa je teda na priamke každý rok a Po je na priamke každé 3 roky.

Znovu môžeme nájsť najmenší spoločný násobok týchto čísel, aby sme našli kedy bude ďalší Priamkový sviatok. Najmenší spoločný násobok 1, 3 a 5 je 15. Vtedy Pa prejde 7 a pol krát okolo Ťuk, Pi 3 krát a Po 2 a pol krát. V tomto prípade, Pi bude na pravej strane planéty a Pa a Po budú na ľavej strane.

Rovné sviatky sa oslavovali každých 30 rokov, v 1521, 1551... Priamkové sviatky sa oslavovali každých 15 rokov, v 1506, 1521, 1536...

**Každý druhý priamkový sviatok je zároveň aj rovný sviatok.**

***Úloha č. 4*** ***(****opravoval Hynek Bachratý****)***

Kapitánove číslo 85 a kuchárove číslo 87 majú tú vlastnosť, že súčet každého z nich s ciframi toho druhého dá sto: 85 + 8 + 7 = 87 + 8 + 5 = 100. Máme nájsť všetky ďalšie také dvojice, a samozrejme aj vysvetliť, že žiadne ďalšie dvojice už neexistujú.

Riešenie ste mohli začať skúšaním rôznych dvojíc, alebo tým, že pri malej zmene ich čísel sa vlastnosť zachová – napríklad aj 84 a 88 vyhovujú. Pri tom ste začali dostávať rôzne dobré nápady.

Je jasné, že ak by jedno číslo bolo trojciferné, a teda aspoň 100, keď ho ešte o nejaké cifry zväčšíme, súčet 100 prekročíme. Čísla sú teda menšie ako sto, teda najviac dvojciferné. Naopak ak k jednocifernému číslu pripočítam dve cifry, 100 určite nedosiahnem. **Obe čísla sú teda dvojciferné.**

Z dvojciferných čísel má najväčšie cifry 99. Súčet cifier je 9 + 9 = 18. Aby sme ich pričítaním k druhému číslu dostali 100, to musí byť najmenej 100 – 18 = 82. **Menšie číslo ako 82 teda v žiadnej dvojici určite nebude.**

Naopak čísla od 82 po 99 majú ciferné súčty 9 (pre číslo 90) alebo viac. Aby sme ich pričítaním neprekročili 100, druhé číslo môže byť maximálne 100 – 9 = 91. **V dvojici teda určite nebude číslo väčšie ako 91**.

Teraz nám už stačí len vyskúšať možnosti, ktoré zostali. Skúsime teda pre čísla 82 až 91 nájsť ich vhodnú dvojičku.

Číslo 82 nevyhovuje, lebo k nemu potrebujeme pridať 82 + 9 + 9, ale 99 + 8 + 2 je príliš veľa.

Potom nám ale pekne vychádzajú dvojice 83 a 89, 84 a 88, 85 a 87, a dvojica 86 a 86 (vtedy obaja majú rovnaké obľúbené číslo). To sú aj „poposúvané“ čísla zo zadania. Netreba ale zabudnúť vyskúšať aj možnosti 90 a 91, z ktorých nám vyjde posledná dvojica 90 a 91.