JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2024/2025, 3. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 **(***opravoval Matej Grochal***)**

Keďže vieme, že každá pätica za sebou idúcich vozňov vezie 199 pasažierov, tak potom vozne 1-5 vezú rovnako veľa pasažierov ako vozne 2-6 (199 pasažierov). Z toho vieme, že vozeň č. 6 musí viesť rovnaký počet pasažierov ako vozeň č. 1, keďže odpojením 1. vozňa musíme odrátať rovnaký počet pasažierov od 199, koľko musíme prirátať, ak pripojíme 6. vozeň. Tým pádom aj vozeň č. 7 vezie rovnaký počet cestujúcich ako vozeň 2, atď. Vozne (presnejšie počet ľudí v nich sa teda opakujú v cykle po piatich, označme ich **A, B, C, D, E**.

Rozloženie vozňov je nasledovné:

1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*	*13.*	*14.*	*15.*	*16.*	*17.*	*18.*
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**A**	**B**	**C**
199 pasažierov					199 pasažierov					199 pasažierov					103 pasažierov		
700 pasažierov																	

Prvé tri pätice vozňov vezú spolu 597 pasažierov (199 · 3), z čoho vyplýva, že v posledných troch vozňoch A, B, C je spolu 103 pasažierov (700 − 597). Aby posledná pätica (D, E, A, B, C) mala 199 pasažierov, vozne D a E musia viesť 96 pasažierov (199 − 103). **Dva prostredné vozne**, ktoré nás zaujímajú (č. 9 a č. 10) sú zrovna typu D a E – tiež vezú **96 pasažierov**.

Iné riešenie

Ak od 18 vozňov odpojíme dve krajné pätice, zostane nám 8 vozňov s 302 pasažiermi (700 − 2 · 199). V týchto 8 vozňoch môžeme nájsť dve pätice, ktoré by mali spolu 398 pasažierov. Keďže sme rátali prostredné dva vozne dvakrát, rozdiel 398 − 302 je výsledný ***počet pasažierov v dvoch prostredných vozňoch****, teda* ***96****.*

Úloha č. 2 **(***opravoval Miro a Lenka Hudecovci***)**

Každá cifra hovorí o tom, koľko iných cifier danej hodnoty sa nachádza v čísle. Keďže ale vieme, že celé číslo ma 8 cifier, a ľahko sa dá usúdiť, že neobsahuje cifry 8 ani 9, tak aj súčet cifier v čísle musí byť 8. Toto sa nám bude neskôr pri dokazovaní hodiť.

Pozrime sa teraz na poslednú cifru vyjadrujúcu počet sedmičiek v čísle. Môže mať iba hodnotu 0 alebo 1, väčšia by totiž spôsobila ciferný súčet väčší ako 8. Ak by bola sedmička jedna, tak samotná sedmička by musela byť na prvom mieste, aby sa neprekročil ciferný súčet – napríklad číslo 17111111 má ciferný súčet 7 + 7 · 1 > 8. Takže počet 7 môže byť len 0.

Predposledná cifra vyjadrujúca počet šestiek z rovnakých dôvodov môže byť len 0. (6 · 2 > 8, 6 + 6 · 1 > 8)

Rovnako aj počet pätiek môže byť len 0. (5 · 2 > 8, 5 + 5 · 1 > 8)

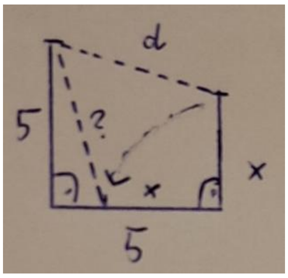
S cifrou 4 je to už iné. Tam prichádzajú do úvahy hodnoty 0, 1 a 2.

Nula to však byť nemôže. Nami hľadané číslo by malo na konci 4 nuly, a teda na prvom mieste (vyjadrujúcom) počet núl by musela byť cifra 4 alebo viac – ale my sme už ukázali, že žiadna taká sa v čísle nachádzať nebude. Dve tiež nemôžu byť, lebo dve štvorky samotné + dvojka vyjadrujúca ich počet dáva dokopy 10, čo je viac ako 8.

Máme teda ešte možnosť _ _ _ _ 1 0 0 0. Cifra 4 by musela byť na začiatku (z dôvodu ciferného súčtu – keby bola inde, prekročili by sme ciferný súčet 8) a ostatné pozície sa dajú doplniť pre tento prípad jedine takto, aby všetko sedelo: 42101000.

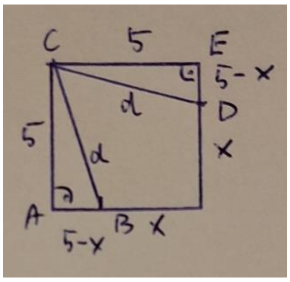
Ďalšie možnosti už rozoberať nemusíme. Totiž v predchádzajúcich krokoch sme určili, že naše číslo končí na 1 0 0 0 a to viedlo len k jednému riešeniu 42101000.

Úloha č. 3 ***(****opravoval Hynek Bachratý****)***

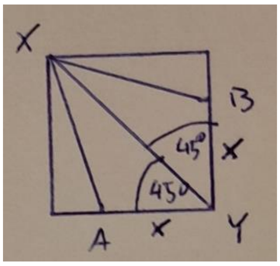


Tento príklad určite nepatril medzi najľahšie. Uznanie patrí všetkým, ktorý sa do neho pustili, aj keď len niektorí zvládli úplne kompletné riešenie.

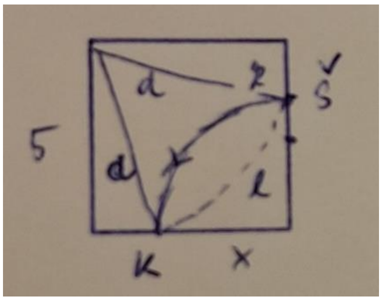
Samozrejme pre geometrickú úlohu je dobé nakresliť si náčrt. Vidíme na ňom zadanie úlohy a kratší stĺp pred pádom a po páde. Na začiatku je drôt označený ***d***, na konci ***?***, lebo nevieme, či je to presne dĺžka ***d***. Dĺžku menšieho stĺpu som označil ***x***, lebo ju nepoznáme presne. Všetky ďalšie úvahy ale platia pre ľubovoľnú hodnotu ***x*** menšiu ako 5.



Najskôr zistíme, ako vyzerá drôt po dopade na zem. Skoro všetci ste správne napísali, že ***?*** bude rovnaká ako ***d***, a teda po páde je drôt zase napnutý. Najčastejšie ste to vysvetľovali dokreslením štvorca s vrcholom ***E***. V ňom potom využijeme zhodnosť trojuholníkov ***ABC*** a ***EDC***. Oba sú pravouhlé, a majú rovnaké strany



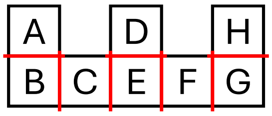
|AC| = |EC| = 5 a |AB| = |ED| = 5 – x. A keďže sú zhodné, musia sa rovnať aj |CD| = |CB|, ktoré zodpovedajú dĺžke drôtu pred búrkou a vzdialenosti vrcholov stĺpov po páde. (Iná možnosť bola dokresliť úsečku ***XY*** a podobne využiť zhodnosť trojuholníkov ***AYX*** a ***BYX***, tiež podľa vety sus). Keďže sú strany rovnaké, **drôt po páde stĺpu je zase našponovaný**. Naozaj?



Tým sa dostávame k druhej časti riešenia, na ktorú žiaľ viacerí úplne zabudli. Nepretrhol sa náhodou drôt počas pádu? Ak áno, na konci nie je napnutý, ale pretrhnutý! Vysvetlenie pri tom nie je zložité. Písmenom ***k*** som označil dráhu malého stĺpu počas pádu, je to časť kružnice. Písmenom ***l*** zase časť kružnice, ktorú by opísal koniec našponovaného dráhu pri pohybe z bodu ***Š*** pred búrkou do bodu ***K*** po páde. V bode ***Š*** obe kružnice začínajú a z prvej časti vysvetlenia už vieme, že v bode ***K*** sa zase obe stretnú. Medzitým sa ale časti kružnice už dotknúť nemôžu, a z ich polohy vyplýva, že **počas pádu je drôt uvoľnený a teda sa pretrhnúť nemôže**.

***Úloha č. 4** (opravoval Jozef Rajník)*

Začneme tým, že si uvedomíme, ako všelijako môžeme útvar rozdeliť. Aby sme útvar rozdelili na dve časti, tak nesmieme rezať cez stranu na obvode útvaru. Vnútri útvaru máme 6 strán a rozrezaním každej z nich rozdelíme útvar na dve časti. Týchto 6 možných rezov sme vyznačili červenou na obrázku. Taktiež sme si označili políčka písmenami A až H, aby sa nám lepšie vyjadrovalo.



Na začiatok si môžeme spočítať, že súčet čísel od 1 po 8 je 36. Ako môžeme číslo 36 rozdeliť na dva sčítance tak, aby jeden delil druhý? Nie je problém vyskúšať všetky možnosti, čím nájdeme nasledovné možné rozdelenia:

$$1 + 35,\ 2 + 34,\ 3 + 33,\ 4 + 32,\ 6 + 30,\ 9 + 27,\ 12 + 24,\ 18 + 18.$$

Všimnite si, že menší (resp. rovný) zo sčítancov je vždy deliteľom čísla 36. Vedeli by ste vysvetliť, prečo to tak je? Týmto pozorovaním by sme si mohli ušetriť skúšanie všetkých možností. Stačilo by nám len prejsť deliteľov čísla 36.

Pozrime sa na ľavé tri políčka A, B, C. Nájdeme všetky možnosti, aké čísla na nich môžu byť. Súčet čísel na nich je najviac 8 + 7 + 6, čo je 21. Preto jediné možné hodnoty tohto súčtu sú 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 a 18 (teda delitele čísla 36). To však musí platiť aj pre súčet políčok A, B a rovnako aj pre samotné políčko A. Na políčku A teda môžu byť len čísla 1, 2, 3, 4 a 6.

Pre každé z týchto čísel zistíme, ktorými číslami môžeme pokračovať na políčku B. Jeden zo spôsobov, ako na nič nezabudnúť, je zaznačiť si možnosti do tabuľky. Pre každé z čísel 1, 2, 3, 4 a 6 vytvoríme samostatný stĺpec. Doňho napíšeme, ktoré dvojice s týmto číslom vieme vytvoriť. Tieto dvojice rozdelíme do riadkov podľa ich súčtu.

	Číslo na políčku A					
	1	**2**	**3**	**4**	**6**	
Súčet čísel na A, B	**3**	1, 2	2, 1			
	4	1, 3		3, 1		
	6	1, 5	2, 4		4, 2	
	9	1, 8	2, 7	3, 6	4, 5	6, 3
	12				4, 8	

Dostali sme 13 možností na vyplnenie prvých dvoch políčok. Podobne pre každú z nich zistíme, čím vieme doplniť políčko C.

		Čísla na políčkach A, B												
		1, 2	**2, 1**	**1, 3**	**3, 1**	**1, 5**	**2, 4**	**4, 2**	**1, 8**	**2, 7**	**3, 6**	**4, 5**	**6, 3**	**4, 8**
Súčet čísel na A, B, C	**6**	1,2,3	2,1,3	1,3,2	3,1,2									
	9	1,2,6	2,1,6	1,3,5	3,1,5	1,5,3	2,4,3	4,2,3						
	12			1,3,8	3,1,8	1,5,6	2,4,6	4,2,6	1,8,3	2,7,3		4,5,3		
	18													4,8,6

Pre lepšiu prehľadnosť sme rovnakou farbou vyznačili trojice, ktoré sa líšia len poradím čísiel. Až do konca riešenia nebudeme rozlišovať trojice rovnakej farby. Dostali sme teda možné trojice čísel pre políčka A, B, C. Možné trojice pre políčka H, G, F sú totožné – situácia na opačnej strane je rovnaká, len zrkadlovo prevrátená.

Z nájdených trojíc tak musíme vybrať dve trojice, jednu na políčka A, B, C a druhú na H, G, F. Vybrane trojice nesmú mať spoločné číslo, a ešte nám musia ostať čísla pre políčka D, E.

Na políčku D musí byť niektoré z čísel 1, 2, 3, 4, 6. Môžeme si však všimnúť, že každá z nájdených trojíc obsahuje dve alebo tri z čísel 1, 2, 3, 4, 6. Preto na políčka A, B, C musíme dať len dve z čísel 1, 2, 3, 4, 6, ďalšie dve na políčka H, G, F. Len vtedy nám ostane číslo na políčko D. Trojice 123, 126, 243, 246 obsahujúce tri takéto čísla preto nemôžeme použiť (ani s prehodenými číslami). Ostávajú nám teda trojice

135, 138, 156, 273, 453 a 486.

Pre každú z nich vyberieme do páru trojicu s nepoužitými číslami. Dostaneme tak páry

- 135 a 486 – ostanú nám čísla 2, 7, pričom na políčku D musí byť 2;
- 156 a 273 – ostanú nám čísla 4, 8, pričom na políčku D musí byť 4;
- 273 a 486 – ostanú nám čísla 1, 5, pričom na políčku D musí byť 1.

V prvej dvojici 135 a 486 máme ešte tri možné poradia na usporiadanie čísiel. Tým dostaneme až 5 možných dvojíc. Pre každú z nich ešte môžeme vymeniť ľavú a pravú stranu. Políčka D a E potom už budú jednoznačne určené. Tým dostávame 10 možných rozložení čísel. Tie vyzerajú nasledovne.

1		2		4
3	5	7	6	8

3		2		4
1	5	7	6	8

1		2		4
5	3	7	6	8

1		4		2
5	6	8	3	7

2		1		4
7	3	5	6	8

4		2		1
8	6	7	5	3

4		2		3
8	6	7	5	1

4		2		1
8	6	7	3	5

2		4		1
7	3	8	6	5

4		1		2
8	6	5	3	7