JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVIII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2024/2025, 1. letná séria
Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravoval Matej Halama)*

Na začiatok sa pozrime, ako by sa správal kratší rad kariet s číslami od 1 do 15. V každom kole z kariet na striedačku postupne jednu odstránim a druhú nechám. Pri 15 kartách by kolá vyzerali takto:

- Prvé kolo: ~~1~~, 2, ~~3~~, 4, ~~5~~, 6, ~~7~~, 8, ~~9~~, 10, ~~11~~, 12, ~~13~~, 14, ~~15~~
- Druhé kolo: ~~2~~, 4, ~~6~~, 8, ~~10~~, 12, ~~14~~
- Tretie kolo: ~~4~~, 8, ~~12~~
- Štvrté kolo: ~~8~~

Môžeme vidieť, že po prvom kole nám zostalo každé druhé číslo, čo sú násobky dvojky. V druhom kole mi zostane každý druhý násobok dvojky, a to sú násobky štvorky ($2 \cdot 2 = 4$). V treťom kole nám zostane každý druhý násobok štvorky, a to sú násobky osmičky ($4 \cdot 2 = 8$). Vo štvrtom kole nám zostala už iba osmička, pretože je to jediný násobok osmičky menší ako 15.

Toto pravidlo platí aj pri pôvodnom rade s 2025 kartami. Po prvom kole zostanú násobky 2-ky, po druhom kole násobky 4-ky, po treťom kole násobky 8-čky, a tak ďalej. My potrebujeme nájsť také číslo, ktoré zostane po nejakom kole ako jediné.

1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	5. kolo	6. kolo	7. kolo	8. kolo	9. kolo	10. kolo
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Po desiatom kole nám zostali násobky 1024, ale jediným násobkom menším ako 2025 je 1024 (ďalšie sú 2048, 3072...).

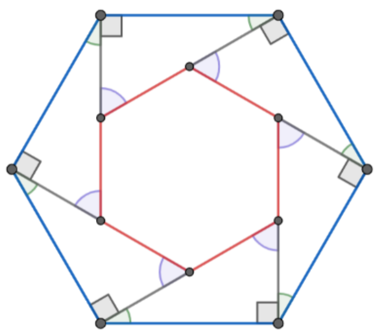
Číslo na poslednej karte je 1024.

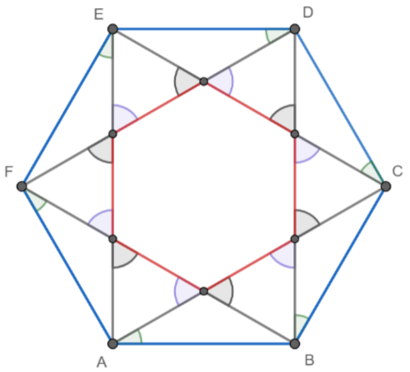
***Úloha č. 2** (opravovala Vierka Glevitzká)*

Našou úlohou je zistiť, aká časť plochy sklíčka nie je prekrytá pravouhlými trojuholníkmi. Potrebujeme teda zistiť akú časť obsahu veľkého (modrého) pravidelného 6-uholníka tvorí malý (červený) šesťuholník. Čo teda o ňom vieme zistiť?

Ako nám aj obrázok napovedá, bude pravidelný. Ale naozaj? Čo ak je obrázok iba zle nakreslený?

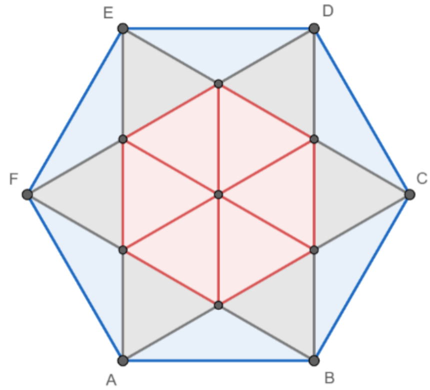
Pozrime sa preto na uhly. Modrý 6-uholník je pravidelný, a preto majú všetky jeho uhly veľkosť 120°. Každý takýto uhol sa skladá z pravého uhla (šedý) a zeleného uhla. Zelené uhly majú preto veľkosť 30°. Súčet uhlov v každom trojuholníku je 180°, a preto musia mať fialové uhly veľkosť 60° (v každom pravouhlom trojuholníku z obrázka už máme uhly 90° a 30°). S každým fialovým uhlom susedí nejaký vnútorný uhol červeného 6-uholníka. Každý vnútorný uhol červeného 6-uholníka má preto veľkosť 120°, a teda červený 6-uholník je pravidelný.





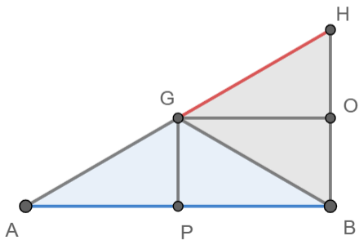
Veľmi by nám pomohlo, keby sa nám podarilo útvary z obrázka nasekať tak, že dostaneme niekoľko útvarov s rovnakým obsahom. Skúsme predĺžiť prepony pravouhlých trojuholníkov. Táto čiara bude prechádzať ďalším vrcholom modrého šesťuholníka. *Nasledujúci odsek iba vysvetľuje, prečo je to naozaj tak – táto úvaha však nemusela byť súčasťou riešenia.*

Keď spojíme body A a C, tak dostaneme rovnoramenný trojuholník ABC, keďže strany AB a BC sú rovnako dlhé. Uhol ABC má veľkosť 120°, a teda uhly BAC a BCA budú mať veľkosť 30°. Keďže zelený uhol pravouhlého trojuholníka s pravým uhlom pri vrchole B má veľkosť 30°, tak prepona tohto trojuholníka bude ležať na úsečke AC. Predĺžením prepony tohto trojuholníka teda dostaneme úsečku AC. Podobné myšlienky, ako v situácií pre pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole B, budú platiť aj pre trojuholníky s pravými uhlami pri zvyšných piatich vrcholoch.



Červený 6-uholník je pravidelný, a teda ho vieme rozdeliť na 6 rovnostranných trojuholníkov. Šedé trojuholníky sú tiež rovnostranné. V každom z nich je jeden fialový uhol (60°) a jeden uhol (šedý), ktorý je vrcholový s nejakým fialovým uhlom, čiže má veľkosť 60°. Dva uhly šedého trojuholníka majú veľkosť 60°, a teda aj tretí bude mať veľkosť 60°. Každý šedý trojuholník má rovnaký obsah ako každý červený trojuholník, lebo majú rovnako dlhé strany (každý šedý trojuholník zdieľa jednu stranu s nejakým červeným trojuholníkom).

Ak by mali šedé a modré trojuholníky rovnaký obsah, tak by sme už vedeli jednoducho zistiť riešenie.



Pozrime sa na pravouhlé trojuholníky zo zadania. Každý sa skladá z jedného šedého a jedného modrého trojuholníka. Rozdeľme oba tieto trojuholníky výškou tak, ako na obrázku. Oba trojuholníky sme tak rozdelili na polovicu, lebo uhly aj strany sú v nich rovnaké. Trojuholník BPG (čo je polovica modrého trojuholníka) spolu s trojuholníkom BOG tvoria obdĺžnik, lebo vieme, že pri vrcholoch P, B a O sú pravé uhly. Tieto trojuholníky majú polovičný obsah ako tento obdĺžnik, a preto majú rovnaký obsah. Polovica modrého trojuholníka (trojuholník BPG) má rovnaký obsah ako polovica šedého trojuholníka (trojuholník BOG), čiže modrý a šedý trojuholník musia mať rovnaký obsah.

Modrý 6-uholník sa skladá z 18-tich trojuholníkov s rovnakým obsahom, zatiaľ čo červený sa skladá zo 6-tich trojuholníkov s takým istým obsahom.

Tretina sklíčka kaleidoskopu nie je prekrytá pravouhlými trojuholníkmi.

Úloha č. 3 (opravoval Janči Jakubík)

Úlohu vieme riešiť viacerými spôsobmi. Môžeme napríklad kresliť rôzne trojuholníkové formácie a podrobovať ich skúmaniu či spĺňajú všetkých 5 pravidiel. Skúsme sa však najskôr zamyslieť nad tým, čo vyplýva z jednotlivých pravidiel.

Pre skrátenie zápisu si označme pravidlá skratkami:

- **P1** – V prvom rade stojí len jeden kovboj, za ním stoja v druhom rade dvaja kovboji, za týmito stoja v treťom rade traja kovboji atď.
- **P2** – Každý kovboj má na hlave práve jeden jednofarebný klobúk.
- **P3** – Všetci kovboji stojaci v jednom rade musia mať rovnakú farbu klobúka.
- **P4** – Kovboji v bezprostredne susediacich radoch majú klobúky rôznej farby
- **P5** – V celej formácii trojuholníkového tvaru je z každej farby rovnaký počet klobúkov.

Z pravidla P5 po zamyslení vieme zistiť, že celkový počet kovbojov v trojuholníkovej formácii musí byť deliteľný počtom rôznych farieb klobúkov bezo zvyšku. – *Úvaha 1*

Pravidlá P5 a P3 nás vedú k zamysleniu, že maximálny možný počet rôznych farieb vo formácii nesmie byť rovný (a ani väčší) počtu radov, lebo potom by v tejto situácii mal každý rad inú farbu alebo by bolo viacej farieb v jednom rade, a teda by daná formácia nevedela dodržať tieto pravidlá. – *Úvaha 2*

Ďalej z pravidla P3 vieme prísť na to, že počet kovbojov, ktorí majú rovnakú farbu klobúka musíme vedieť zapísať ako súčet nie rovnakých celých čísel, pričom každé číslo môže byť v akomkoľvek súčte použité práve raz. – *Úvaha 3*

Zamyslime sa nad tým, či je možné aby vo formácii boli iba dve rôzne farby klobúkov. Ak by to platilo tak by sa farby kvôli pravidlu P4 museli v radoch striedať. Po chvíľke skúšania, kedy sa snažíme vo formácii dodržať aj posledné pravidlo P5 zistíme, že toto posledné pravidlo nevieme nijako dodržať. Dôkaz toho, prečo toto pravidlo pri dvoch farbách nevieme dodržať nechávam na Vás, lebo verím, že keď si to vyskúšate tak za chvíľu dôkaz nájdete. – *Úvaha 4*

Zo zadania úlohy: „*Herb má vo svojej parte viacero kovbojov.*“, a z pravidla P1 zisťujeme, že kovbojov musí byť viacej ako 1, teda trojuholníková formácia musí pozostávať z aspoň dvoch radov. Počet rôznych farieb klobúkov musí byť viac ako 1 aby sme dodržali P4. – *Úvaha 5*

Poďme teraz preskúmať počty kovbojov v trojuholníkovej formácii:

Počet radov vo formácii	Počet kovbojov vo formácii	Delitele počtu kovbojov vo formácii	Možné počty rôznych farieb klobúkov spĺňajúce všetky úvahy
2	3	1, 3	nespĺňa
3	6	1, 2, 3, 6	nespĺňa
4	10	1, 2, 5, 10	nespĺňa
5	15	1, 3, 5, 15	3
6	21	1, 3, 7, 21	3
7	28	1, 2, 4, 7, 14, 28	4
8	36	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 36	3, 4, 6
9	45	1, 3, 5, 9, 15, 45	3, 5

Pozrime sa na formáciu s počtom radov 5. V tejto formácii máme dokopy 15 kovbojov. Pre 3 rôzne farby by počet klobúkov jednej farby bol 5. Súčet 5 podľa tretej úvahy vieme spraviť ako 5, 1 + 4, 2 + 3. Avšak rady s počtom kovbojov 2 a 3 by museli mať rovnakú farbu, čo porušuje P4.

Formácia s počtom radov 6. V tejto formácii máme dokopy 21 kovbojov. Pre 3 rôzne farby by počet klobúkov jednej farby bol 7. Súčet 7 podľa tretej úvahy vieme spraviť ako 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4. Avšak rady s počtom kovbojov 3 a 4 by museli mať rovnakú farbu, čo porušuje P4.

Formácia s počtom radov 7. Táto formácia je veľmi podobná formácii so 6 radami. V tejto formácii máme dokopy 28 kovbojov čo je o 7 viac (o jeden rad so 7 kovbojmi viac) ako pri formácii so 6 radmi. Pre 4 rôzne farby by počet klobúkov jednej farby bol 7. Posledný siedmy rad by musel mať farbu, ktorá už nemôže byť použitá vinom rade, čo by znamenalo, že zvyšok formácie by bol zhodný s formáciou s počtom radov 6. Tým pádom by aj táto formácia porušovala P4.

Formácia s počtom radov 8. V tejto formácii máme dokopy 36 kovbojov. Pre 3 rôzne farby by počet klobúkov jednej farby bol 12. Súčet 12 podľa tretej úvahy vieme spraviť ako 1 + 3 + 8, 2 + 4 + 6, 5 + 7. Takéto rozloženie farebných klobúkov vo formácii neporušuje ani jedno pravidlo, a teda táto formácia s počtom radov 8 je prvá formácia, ktorá spĺňa podmienky úlohy.

Mohli by sme pokračovať ďalej v hľadaní ďalších formácii, ktoré spĺňajú podmienky úlohy avšak pre zodpovedanie otázky: "*koľko najmenej radov má trojuholníková formácia*", to nie je potrebné.

Trojuholníková formácia spĺňajúca všetky uvedené pravidlá bude mať najmenej 8 radov.

Úloha č. *4* ***(****opravovala Erika Novotná****)***

Našou úlohou je ukázať, že v každej dvadsatici čísel je aspoň jedno deliteľné svojim ciferným súčtom. Väčšina z vás si na **malých** trojciferných číslach všimla, že keď budeme brať čísla deliteľné deviatimi, tak tieto vyzerajú byť Kravské – totižto platí, že ak je číslo deliteľné deviatimi, tak aj jeho ciferný súčet musí byť deliteľný deviatimi. A keďže malé trojciferné čísla deliteľné deviatimi majú ciferný súčet priamo deväť, tak sú určite Kravské. Teda čísla 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180 s ciferným súčtom 9 sú určite Kravské. Vzápätí však nastane problém, však?

Ďalší násobok 9tky je číslo **189**, s ciferným súčtom 18. Číslo 189 určite nie je Kravské, lebo síce je násobok 9tky, ale nie je násobkom 18tky. Na to, aby bolo násobkom osemnástky, tak by muselo byť párne a súčasne násobkom čísla 9. Ak vezmeme ďalší násobok 9tky, teda číslo **198**, to už párne je, a súčasne je deliteľné svojim ciferným súčtom 18. Skúsme teda ďalej uvažovať o násobkoch 18tky. Zároveň si uvedomme, že všetky trojciferné čísla deliteľné deviatimi musia mať ciferný súčet buď 9, 18 alebo 27, pričom ciferný súčet 27 má len najväčšie z nich, teda číslo 999. Zhodou okolností je číslo 999 Kravské, lebo 999 : 27=37.

V každej dvadsatici po sebe idúcich trojciferných čísel je určite aspoň jedno násobkom čísla 18. Vezmime teraz toto číslo a pozrime sa na jeho ciferný súčet.

Buď je tento ciferný súčet osemnásť, a teda máme násobok čísla 18 s ciferným súčtom 18, teda toto číslo je Kravské.

Alebo je tento ciferný súčet deväť (napríklad ako pre číslo 504). No a keďže máme násobok čísla 18, je toto číslo určite aj násobkom čísla 9, teda toto číslo je taktiež Kravské.

To znamená, že trojciferné čísla, ktoré sú násobky 18tky sú určite Kravské. A teda v každej dvadsatici je aspoň jedno také, niekedy aj dve.

Niektorí z vás úlohu riešili tak, že jednoducho našli Kravské čísla tak, aby v každej dvadsatici po sebe idúcich bolo určite aspoň jedno z nich. Toto riešenie je tiež úplne správne, aj keď možno viac pracné a náchylné na chyby (lebo treba overovať veľmi veľa deliteľností). Jedna z mnohých možností vypísania vhodnej sady Kravských čísel je inšpirovaná riešením Martiny Čakyovej:

100, 120, 140, 153, 162, 180, 200, 220, 240, 252, 261, 280, 300, 320, 333, 351, 370, 392, 400, 420, 440, 460, 480, 500, 513, 522, 540, 558, 576, 594, 600, 612, 630, 640, 660, 666, 684, 700, 720, 735, 747, 756, 780, 800, 820, 840, 846, 864, 880, 900, 910, 918, 936, 954, 972, 990.