JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2024/2025, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 ***(****opravovali Maťka Gaňová a Miška Rosinská****)***

Zo zadania vieme, že najväčšie číslo na modrom terči je počet modrých terčov. Modré terče budú musieť mať najmenšie čísla, bez červených terčov medzi nimi. Ak by najväčší modrý terč bol 10, všetky terče od 1 po 10 musia byť modré, aby 10 terčov bolo modrých. To znamená, že zvyšok terčov bude červených.

Podmienky zo zadania môžeme preložiť do rovníc. Použijeme pre to písmena Č a M za počet červených a modrých terčov. Dokopy je 101 terčov $M + Č = 101$.

Keďže modré terče idú od 1 po M, červené terče pôjdu od $M + 1$ po 101. Takže najmenší červený terč bude mať číslo $M + 1$.

Vieme zo zadania tiež to, že najmenšie číslo na červenom terči je dvakrát menšie ako počet červených terčov. Ak je najmenšie číslo na červenom terči $M + 1$, tak dokopy je $2(M + 1)$ červených terčov, a Č môžeme zameniť za $2(M + 1)$.

Máme teda rovnicu $M + 2(M + 1) = 101$, ktorú môžeme upraviť, aby sme dostali M:

$$M + 2(M + 1) = 101$$

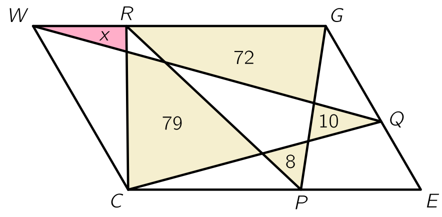
$$M + 2M + 2 = 101$$

$$3M = 99$$

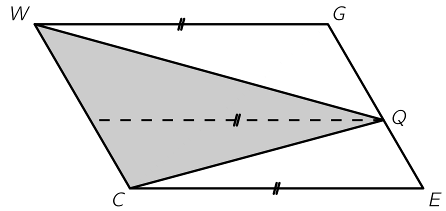
$$M = 33$$

Jediné rozdelenie, ktoré spĺňa všetky podmienky je, keď je 33 modrých terčov. Vtedy zostane 68 červených terčov, a najmenší červený terč bude mať číslo 34, čo je polovica počtu červených terčov.

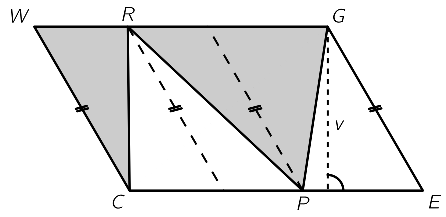
Úloha č. 2 (**opravoval Peťo Novotný**)



Označme jednotlivé body ako na prvom obrázku. Nie sú zadané žiadne dĺžky a trojuholník s neznámym obsahom x nemá žiadny očividný vzťah s trojuholníkmi so známymi obsahmi, obrázok navyše obsahuje pomerne veľa čiar. Niečo však vieme povedať o obsahoch útvarov, ktoré dostaneme, ak niektoré čiary vynecháme.



Začnime s trojuholníkom *CQW*. Ten má stranu *WC* spoločnú s celým rovnobežníkom a aj výšku na túto stranu má zhodnú s výškou rovnobežníka na ňu. Keďže obsah rovnobežníka sa počíta podľa vzorca (*strana*) · (*výška*) a obsah trojuholníka podľa vzorca (*strana*) · (*výška*) / 2, je obsah trojuholníka *CQW* polovicou obsahu zadaného rovnobežníka. Toto isté vieme zdôvodniť aj inak – ak vedieme cez bod *Q* rovnobežku so stranou *CE*, tá rozdelí celý rovnobežník na dva menšie rovnobežníky, ktoré sú uhlopriečkami *CQ* a *QW* rozdelené presne napoly. Preto sivá časť na druhom obrázku je rovnako veľká ako biela časť. A ešte zdôvodnenie tretím spôsobom: Trojuholník *CQW* má rovnaký obsah ako trojuholník *CGW* (rozmyslite si, prečo), ktorý je polovicou rovnobežníka.



Podobnú úvahu teraz urobíme pre útvary ohraničené zvyšnými čiarami, ktoré sme v predošlom obrázku vynechali, teda pre trojuholníky *WCR* a *RPG*. O každom zvlášť veľa povedať nevieme, ale súčet ich obsahov je opäť polovicou obsahu celého rovnobežníka. Zdôvodniť sa to dá podobne ako v predošlom odseku tromi rôznymi spôsobmi (vyberte si, ktorý sa vám najviac páči):

Súčet dĺžok základní *WR* a *RG* je dĺžka strany rovnobežníka *WG* a výšku na tieto strany majú oba trojuholníky rovnako veľkú ako rovnobežník – označme ju v – takže

$$S_{WCR} + S_{RPG} = |WR| \cdot \frac{v}{2} + |RG| \cdot \frac{v}{2} = \frac{v}{2} \cdot (|WR| + |RG|) = \frac{v}{2} \cdot |WG| = \frac{S_{CEWG}}{2}.$$

Rovnobežky so stranami rovnobežníka vedené bodmi *P*, *R* rozdeľujú celý rovnobežník na tri menšie rovnobežníky, polovička každého z nich je sivá a polovička biela.

Trojuholník *RPG* má rovnaký obsah ako trojuholník *RCG* (rozmyslite si, prečo), a teda sivá časť má spolu rovnaký obsah ako trojuholník *CGW*.

Zistili sme teda, že sivá oblasť z druhého obrázka má rovnaký obsah ako sivá oblasť z tretieho obrázka. Keď sa teraz vrátime k prvému obrázku, vidíme, že sivá oblasť z druhého obrázka sa skladá z dvoch bielych častí (s neznámym obsahom) a ešte z plôch s obsahmi 79 a 10, zatiaľ čo sivá oblasť z tretieho obrázka sa skladá z tých istých dvoch bielych častí a ešte z plôch s obsahmi 72, 8 a x. Musí teda platiť $79 + 10 = 72 + 8 + x$, odkiaľ už poľahky dostaneme $x = 9$.

Úloha č. 3 (*opravoval Janči Jakubík****)***

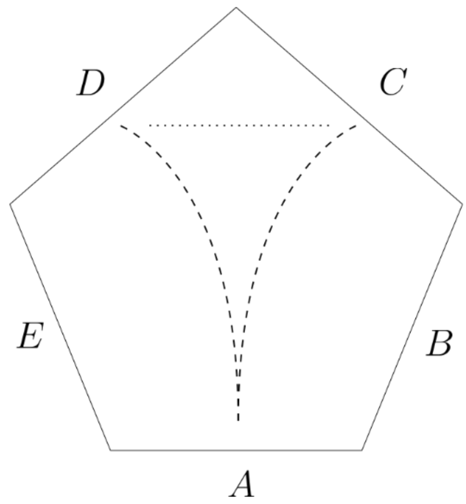
Na celú situáciu sa pozrime z pohľadu Suzy. Ona sa nechá unášať prúdom vody, a ak by sa nepozrela na breh, ani by si neuvedomila, že voda tečie. Vidí len to, že sa od nej 15 minút vzďaľuje Willy, a potom sa k nej rovnakou rýchlosťou vracia, keďže prúd rieky pôsobí na oboch rovnako. Z toho je jasné, že Willy po otočení dorazí k Suzy po ďalších 15 minútach. Túto skutočnosť si mnoho z Vás uvedomilo napríklad aj tým, že Vám z rovníc, ktoré ste zostavili a neskôr upravovaním vyriešili, úplne vypadla Willyho rýchlosť. Keďže prúd odniesol Suzy za 30 minút do vzdialenosti 4 kilometre, rieka tečie rýchlosťou 4km : 30 minút = = 4km : ½ hodiny = 8 kilometrov za hodinu.

Poznámka: *Všimnite si, že vôbec nezáleží na tom, akou rýchlosťou pláva Willy. Rovnako by to vyšlo dokonca aj vtedy, keby plával najskôr po prúde a potom proti prúdu. Problém by nastal vtedy, keby plával nulovou rýchlosťou – rozmyslite si, prečo.*

Úloha č. 4 (**opravoval Adam Kňaze**)

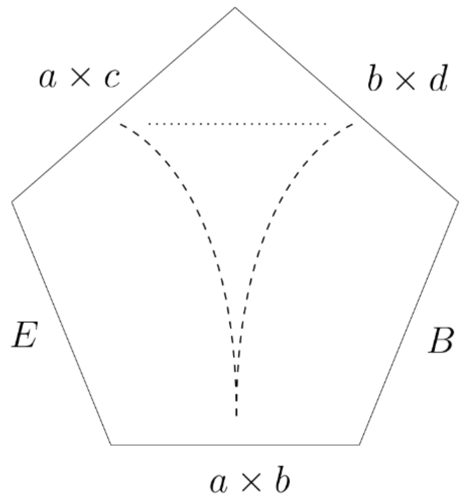
Pri takýchto úlohách nikdy neuškodí začať nákresom. Päťboká krabička má päťuholníkovú podstavu a na každej jej strane musíme nastaviť jedno číslo. Aby sa nám o nich ľahšie písalo, označme si tieto čísla písmenami **A**, **B**, **C**, **D** a **E**.

Podľa zadania musia byť susedné čísla nesúdeliteľné a nesusedné čísla zase súdeliteľné. Pozrime sa na to z pohľadu čísla **A**. Zadanie hovorí, že je súdeliteľné s číslami **D** a **C** (čiarkovaná čiara), takže dvojice **AD** a **AC** musia mať aspoň jedného spoločného deliteľa. Zároveň čísla **D** a **C** susedia, musia tak byť nesúdeliteľné (bodkovaná čiara). To znamená, že nesmú mať spoločného deliteľa.



Aby sme dodržali podmienky zo zadania, dvojice **AD** a **AC** musia mať každá iného spoločného deliteľa. Číslo **A** teda musí mať aspoň dvoch deliteľov. Toto bude platiť pre každé číslo na krabičke, môžeme teda rovno zahodiť všetky prvočísla (1, 2, 3, 5, 7...) a všetky čísla, ktoré majú len jedného deliteľa (4, 8, 9, 16...).

No a keď už riešime tých deliteľov, môžeme si ich rovno zakresliť aj do obrázka. Znovu sa na to pozrieme z pohľadu čísla A. Vieme, že má dvoch deliteľov, označme si ich **a** a **b**. Číslo **D** bude zdieľať s číslom **A** deliteľa **a**, a druhého deliteľa **c** bude mať iného (inak by boli **A** a **D** to isté číslo). To isté platí pre číslo **C**, ktoré musí mať tiež svojho vlastného deliteľa.



Rovnako môžeme doplniť zvyšné delitele. Číslo **E** musí zdieľať jedného deliteľa s číslom **C**. Nemôže to byť deliteľ **b**, inak by bolo súdeliteľné so svojim susedom **A**. Bude mať teda deliteľa **d**, plus jedného vlastného deliteľa **e** (nemôže si požičať žiadneho deliteľa ani od druhého suseda **D**). Pre číslo **B** stačí zobrať jedného deliteľa z každého čísla oproti.

No a keď máme všetky čísla takto pekne vyjadrené cez ich deliteľov, jediné čo musíme spraviť je dosadiť hodnoty za **a**, **b**, **c**, **d**, **e**. Keďže chceme čo najmenšie čísla, pôjdeme zaradom od najmenších deliteľov a doplníme 2, 3, 5, 7 a 11. Výsledná kombinácia na otvorenie krabičky potom bude 6, 55, 21, 10, 77.

Najmenšie možné číslo na krabičke je 6, lebo je to najmenšie číslo, ktoré má aspoň dva delitele (okrem samého seba a jednotky).