JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2024/2025, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (*opravoval Aďo Mrázik****)***

Našou úlohou je nájsť všetky riešenia hlavolamu: TY + TY + TY + TY + TY = VY. TY máme na ľavej strane 5-krát, takže sme to schopný napísať aj ako 5 · TY = VY.

Chceme čo najviac zúžiť možnosti, a preto sa postupne pozrieme na jednotlivé písmená. Môžeme začať napr. písmenom T. Keby T bolo 2, tak aj pri najmenšom možnom Y (Y = 0) by nám výsledok na ľavej strane vyšiel ako trojciferné číslo (5 · 20 = 100). To by znamenalo, že nejaké trojciferné číslo sa má rovnať dvojcifernému (VY), čo sa samozrejme nemôže stať. Zväčšovaním T sa nám tiež akurát zväčší výsledok, takže vieme, že **T je určite menšie ako 2**. T taktiež nemôže byť 0, lebo potom by TY nebolo dvojciferné číslo. Zoberme si napríklad číslo 05. Ak by sme číslo 05 chápali ako dvojciferné, potom číslo 005 by sme brali ako trojciferné. Tieto čísla však majú rovnakú hodnotu 5. Bolo by teda jednociferné, dvojciferné... koľkociferné číslo? Toto nedáva úplne zmysel, a preto nepovoľujeme cifru 0 na začiatku čísla. Z toho nám vychádza, že **T = 1**.

Ďalej môžeme ísť na Y. Na nájdenie Y máme 2 spôsoby, ktoré sa vo vašich riešeniach opätovne vyskytovali. Poďme sa na obidva pozrieť:

1. Prvá možnosť je vyskúšať dosadiť všetky možné cifry za Y a skúsiť nájsť také V, aby hlavolam vychádzal.

a) Y = 0 => 5 · 10 = 50 = V0 => V = 5. **Toto riešenie vyhovuje.**
b) Y = 1 ani nemusíme skúšať, keďže zo zadania vieme, že cifry T, Y a V musia byť od seba rôzne a T sa musí rovnať 1.
c) Y = 2 => 5 · 12 = 60 = V2 => keďže nám nevychádzajú cifry na mieste jednotiek (na ľavej strane máme 0 a na pravej 2), nedokážeme nájsť také V, aby toto platilo.
d) Y = 3 => 5 · 13 = 65 = V3 => rovnaké odôvodnenie ako pri Y = 2.
e) Y = 4 => 5 · 14 = 70 = V4 => rovnaké odôvodnenie ako pri Y = 2.
f) Y = 5 => 5 · 15 = 75 = V5 => V = 7. **Toto riešenie vyhovuje.**
g) Y = 6 => 5 · 16 = 80 = V6 => rovnaké odôvodnenie ako pri Y = 2.
h) Y = 7 => 5 · 17 = 85 = V7 => rovnaké odôvodnenie ako pri Y = 2.
i) Y = 8 => 5 · 18 = 90 = V8 => rovnaké odôvodnenie ako pri Y = 2.
j) Y = 9 => 5 · 19 = 95 = V9 => rovnaké odôvodnenie ako pri Y = 2.

2. Druhá možnosť je uvedomiť si, že keďže VY je rovné päťnásobku TY, **VY musí byť deliteľné číslom 5**. Z pravidiel deliteľnosti vieme, že každé číslo deliteľné číslom päť má na mieste jednotiek buď cifru 0 alebo 5. Toto si môžeme všimnúť aj v prvej možnosti hľadania Y, kde cifra na mieste jednotiek na ľavej strane (5 · TY) sa vždy rovnala 0 alebo 5 (50, 55, 60, 65...). **Toto teda znamená, že Y = 0 alebo Y = 5**. Potrebujeme si to ale overiť a dopočítať V pre každé Y. Po overení sme našli rovnaké riešenia ako v prvej možnosti.

Naše finálne riešenia teda sú: T = 1, Y = 0, V = 5 a T = 1, Y = 5 a V = 7.

Úloha č. 2 (*opravovala Kačka Bachratá**)***

Milí riešitelia, bola som veľmi rada, že som mohla opravovať úlohu, ktorá sa vám tak krásne podarila. Ja som si totiž tiež skúsila tento obrázok narysovať. A bola to teda riadna robota. Stále som nevedela trafiť obrázok tak, aby sa mi všetky polkružnice preťali v strede obrázku v jednom bode. Potrebovala som naozaj ostrú ceruzku a ostré kružidlo. A potom ešte veľmi presné rysovanie, aby sa vždy úsečky a kružnice stretli v jednom bode. A poviem vám, že vaše obrázky boli omnoho lepšie ako moje prvé pokusy. Ale nakoniec sa mi to podarilo a vám tiež.

Tak máte odo mňa veľkú pochvalu a kto mal menej bodov, nech nabudúce pred rysovaním ešte lepšie naostrí ceruzu. Niektorí mimoriadne usilovní riešitelia napísali aj postup, ako sa má úloha rysovať. To síce nebolo treba, ale bola som rada, že si môžem prečítať také presné návody.

Úloha č. 3 (*opravovala Erika Novotná**)***

Našou úlohou je zistiť, ako mohli domorodci stáť v rade za sebou. Vieme, že ich je 25 a každý z nich je buď klamista alebo pravdista. Pre prvého v rade máme len dve možnosti – buď je pravdista, alebo klamista. Pozrime sa najskôr na možnosť, že by bol pravdista. Aby sme si riešenie sprehľadnili, budeme pravdistov označovať písmenom P a klamistov písmenom K.

1. možnosť: **Ak by bol prvý pravdista**, tak jeho tvrdenie „Všetci za mnou sú klamisti" by mala byť pravda. Rad domorodcov by teda musel vyzerať takto: P K K K ... K K.
   Čiže druhý, tretí až dvadsiaty piaty domorodec by už všetci museli byť klamisti. Keď skúsime overiť, či to vychádza, tak druhý je naozaj klamár, lebo povedal o prvom, že je klamista. **Tretí v rade**, však hovorí o druhom, že je klamista, čiže **hovorí pravdu**. Teda to nevychádza, a prvý domorodec tým pádom **nemohol** byť pravdista.
2. možnosť: **Ak by bol prvý klamista**, tak tvrdenie, že všetci za ním sú klamisti, je klamstvo – teda určite by niektorý zo zvyšných 24 domorodcov musel byť pravdista. Možno by mohli byť pravdisti viacerí alebo dokonca všetci ostatní. Toto je veľmi veľa možností, preto sa pozrieme ešte na to, čo postupne hovoria ostatní domorodci. Druhý domorodec v rade o prvom povedal, že je klamista, čo naozaj v tomto prípade sedí. Teda rad zatiaľ vyzerá takto: K P. Tretí domorodec v rade potom o druhom (pred sebou) hovorí, že je klamista, čiže klame, teda rad vyzerá zatiaľ takto: K P K. Štvrtý v rade o treťom hovorí, že je klamista, čiže hovorí pravdu: K P K P... A podobne sa to opakuje stále až do konca, teda rad domorodcov je: K P K P K P K P K P K P K P K P K P K P K P K P K.

Ďalšiu možnosť na to, čo mohol byť prvý, už nemáme.

Teda úloha má jediné riešenie a to, že na nepárnych miestach stoja klamisti, a na párnych pravdisti.

***Úloha č. 4** (opravoval Janči Jakubík)*

K hľadaniu takých obdĺžnikov, ktoré by mohli byť pôdorysmi kajút ste pristupovali rôznymi spôsobmi. Niektoré riešenia boli elegantné a krátke, iné podrobné a dlhé, a niektoré boli aj s obrázkami a farebné. Pre prvú časť riešenia, hľadanie pôdorysov, som sa rozhodol vybrať za vzorové riešenie taký spôsob hľadania možných rozmerov, ktorý zvolilo najviac z vás.

Začnime teda hľadať možné rozmery obdĺžnika skúšaním. Za šírku obdĺžnika, ktorú si označíme ako Š, dosadzujme postupne celé čísla od 1 až po napríklad 10. Celé čísla dosadzujeme preto, aby sme splnili podmienku zo zadania úlohy: „Ich dĺžka a šírka v metroch sú celé čísla“. Následne si dopočítame podľa ďalšej podmienky zo zadania úlohy dĺžku označenú ako D. Druhú podmienku: „Dĺžka je o 6 metrov väčšia ako šírka“, vieme zapísať ako: D = Š + 6.

Š + 6 = D
1 + 6 = 7
2 + 6 = 8
3 + 6 = 9
4 + 6 = 10
5 + 6 = 11
6 + 6 = 12
7 + 6 = 13
8 + 6 = 14
9 + 6 = 15
10 + 6 = 16

Vypočítali sme možné rozmery obdĺžnika, ktoré spĺňajú dve z troch podmienok zo zadania úlohy pre šírky obdĺžnika od 1 do 10.

Preskúmajme či sa tieto rozmery zhodujú s poslednou podmienkou zo zadania úlohy: „Dĺžka je celočíselným násobkom šírky“. Túto podmienku vieme zapísať aj ako: D / Š = celé číslo (v tabuľke zaokrúhľujeme podiel na dve desatinné miesta).

D	/	Š	=	podiel	Je podiel celé číslo?
7	/	1	=	7	**Áno**
8	/	2	=	4	**Áno**
9	/	3	=	3	**Áno**
10	/	4	=	2,5	Nie
11	/	5	=	2,2	Nie
12	/	6	=	2	**Áno**
13	/	7	=	1,86	Nie
14	/	8	=	1,75	Nie
15	/	9	=	1,67	Nie
16	/	10	=	1,6	Nie

Vidíme, že všetkým trom podmienkam zo zadania úlohy vyhovujú štyri dvojice rozmerov (Š, D) obdĺžnika, a to: (1, 7), (2, 8), (3, 9), (6, 12).

Sú to ale všetky možné dvojice rozmerov? Nemôže ich byť viac? Nie je treba skúmať aj ďalšie možné šírky kajút? Táto časť vzorového riešenia je trošku náročnejšia ale verím, že na jej druhé alebo tretie prečítanie jej úplne porozumiete.

Pre zodpovedanie tejto otázky ešte raz preskúmajme tabuľku s podielmi D / Š. Môžeme si všimnúť, že podiel nám postupne s rastúcou hodnotou šírky Š **klesá**.

Aký je najmenší možný celočíselný podiel D / Š, ak D aj Š sú celé čísla? Zamyslime sa, či môže tento podiel nadobudnúť hodnotu 1. Po chvíľke uvažovania môžeme povedať, že podiel D / Š by mohol nadobudnúť hodnotu 1 iba v prípade, že D = Š. Tento prípad však nikdy nemôže nastať, pretože v zadaní úlohy máme podmienku: „Dĺžka je o 6 metrov väčšia ako šírka“. Z toho vieme povedať, že číslo 1 **nemôže byť celočíselným násobkom šírky**. Alebo naopak pri dodržaní podmienky: „Dĺžka je o 6 metrov väčšia ako šírka“ bude platí D > Š, z čoho vieme povedať, že podiel D/Š bude vždy väčší ako 1.

Aký je najbližší možný celočíselný podiel väčší ako 1? Mohlo by to byť číslo 2? Tento podiel vieme získať, ak D = 2 · Š. Pri pohľade na tabuľku podielov si môžeme všimnúť, že tento podiel sme už „našli“ pri možnosti Š = 6 a D = 12.

Preskúmajme najväčší možný podiel D / Š ktorý vieme získať. Stále platí, že D a Š sú celé čísla teda, najväčší možný podiel, ktorý vieme získať je rovnako veľký ako delenec, a v našom prípade hodnota dĺžky D. Táto situácia D / Š = D môže nastať jedine ak Š = 1. Ak sa opäť pozrieme na tabuľku podielov tak túto situáciu sme tiež už „našli“ a v tejto situácii je podiel aj D = 7.

Ostáva nám preskúmať, aké iné celočíselné podiely D / Š vieme nájsť pri dodržaní podmienok, že D a Š sú celočíselné, D = Š + 6 a sú viac ako 2 ale menej ako 7. Týmto podmienkam už zodpovedajú iba hodnoty podielov 4 pre Š = 2 a 3 pre Š = 3, ktoré sme skúšaním našli v prvej časti úlohy.

Preskúmali sme všetky možnosti vyhovujúceho celočíselného podielu za daných podmienok úlohy. Od najväčšej možnej hodnoty podielu 7 kedy Š = 1, až po najmenšiu možnú hodnotu podielu 2, kedy Š = 6. Môžeme teda jednoznačne povedať, že všetky štyri dvojice rozmerov (Š, D) obdĺžnika, a to: (1, 7), (2, 8), (3, 9), (6, 12) sú zároveň aj **jediné možné dvojice rozmerov kajuty**, ktoré riešia úlohu a nemôže ich byť viac a ani menej.