JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2024/2025, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (*opravovala Vierka Glevitzká*)

Každá dvojica susedných cifier má byť deliteľná číslami 17 alebo 23. Vypíšme si preto najprv všetky dvojciferné násobky čísel 17 a 23:

17, 34, 51, 68, 85
23, 46, 69, 92

Poznáme iba poslednú cifru hľadaného čísla. Poďme sa preto pozrieť, ako bude vyzerať od konca. Ako sme už vraveli, každá dvojica susedných cifier musí byť deliteľná číslami 17 alebo 23. Preto aj posledné dvojčíslie túto podmienku musí spĺňať. Aká cifra môže byť pred sedmičkou? *Jediné* také dvojciferné číslo, ktoré je násobkom čísla 17 alebo čísla 23, je číslo 17. Preto musí byť predposledná cifra 1.

Aká bude tretia cifra od konca? Potrebujeme aby spolu s cifrou 1 vytvorila nejaký násobok čísla 17 alebo čísla 23. Jediný takýto násobok je číslo 51. Preto musí byť tretia cifra od konca 5. Podobne pokračujeme ďalej.

Hľadáme násobok čísel 17 a 23,

...ktorý končí cifrou 5. Jediný taký násobok je **85**. Preto musí byť 4. cifra od konca **8**.
...ktorý končí cifrou 8. Jediný taký násobok je **68**. Preto musí byť 5. cifra od konca **6**.
...ktorý končí cifrou 6. Jediný taký násobok je **46**. Preto musí byť 6. cifra od konca **4**.
...ktorý končí cifrou 4. Jediný taký násobok je **34**. Preto musí byť 7. cifra od konca **3**.
...ktorý končí cifrou 3. Jediný taký násobok je **23**. Preto musí byť 8. cifra od konca **2**.
...ktorý končí cifrou 2. Jediný taký násobok je **92**. Preto musí byť 9. cifra od konca **9**.
...ktorý končí cifrou 9. Jediný taký násobok je **69**. Preto musí byť 10. cifra od konca **6**.
...ktorý končí cifrou 6. Jediný taký násobok je **46**. Preto musí byť 11. cifra od konca **4**.

Atď.

To znamená, že hľadané číslo bude od konca vyzerať takto ...46923468517. Ako sme už zistili, pred cifrou 4 musí byť cifra 3, pred ňou musí byť cifra 2, pred ňou musí byť cifra 9, pred ňou musí byť cifra 6 a pred ňou musí byť cifra 4. Cifry 46923 sa nám preto budú v čísle stále opakovať. Opakovať sa začínajú už od cifry 6: ...46 92346 92346 8517

Ktorá cifra bude v hľadanom čísle prvá? Hľadané číslo sa skladá z pätíc opakujúcich sa čísel, ku ktorým na konci pridáme ešte 8517. Od čísla 2024 teda odčítame štvorku, aby sme zistili, aký dlhý úsek tvoria opakujúce sa pätice (2020 cifier). Číslo 2020 je bezo zvyšku deliteľné číslom 5, takže úsek 92346 sa bude celý v hľadanom čísle nachádzať presne 404-krát.

Prvá cifra čísla, ktoré veštica napísala, bola 9. Vieme to s istotou, lebo pri dopisovaní cifier odzadu exitovala vždy iba jediná možnosť, ktorá bude nasledujúca.

Úloha č. 2 (*opravovala Baška Marečáková*)

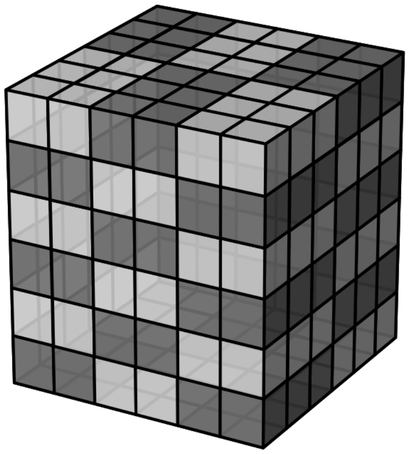
Našimi stavebnými jednotkami sú kvádre s rozmermi 1 · 2 · 3 stopy. Objem stavebného kvádra vypočítame vynásobením dĺžok strán – 6 kubických stôp.

Z kvádrov máme postaviť čo najmenšiu kocku. Kocka musí mať všetky rozmery rovnaké. Najmenšia kocka, ktorá má celočíselné strany je 1 · 1 · 1 stopy. Objem takejto kocky je 1 kubická stopa. Tam však nezmestíme ani jeden náš kváder. Ďalšia je 2 · 2 · 2 s objemom 8 kubických stôp. Zmestíme 1 kváder a nejaký priestor zostane prázdny.

Aký je najmenší rozmer, kde určite zmestíme celočíselný počet kvádrov? Objem kocky musí byť deliteľný obsahom stavebných kvádrov, teda číslom 6. Najmenšia tretia mocnina (alebo aj objem kocky) je 6^3, teda rozmery sú 6 · 6 · 6 stôp. Menšie kocky by v sebe nemali celočíselný počet kvádrov, alebo by mali v sebe diery.

Ešte nám zostáva ukázať, že sa určite dá takáto kocka postaviť. Ak uložíme na spodné poschodie 6 kvádrov, ako na nasledovnom obrázku, tak dostaneme 6x6x1 kváder. Následne ich uložíme 6 na seba a vytvoríme kocku s rozmerom 6 · 6 · 6 stôp. Týmto sme ukázali, že sa dá postaviť.

Na postavenie najmenšej prekážky rozmerov 6 · 6 · 6 stôp v tvare kocky potrebujeme 36 kvádrov.



Úloha č. 3 (**opravoval Matej Halama**)

Príklad sme mohli riešiť viacerými spôsobmi, ukážeme si dva z nich.

Postupné preberanie možností:

Máme vyriešiť násobenie **BAO** · **BA** · **B** = 2002, skúsme teda za **BAOBAB** dosadiť nejaké čísla:

732 · 73 · 7 = 374 052, 489 · 48 · 4 = 93 888, 960 · 96 · 9 = 829 440, 258 · 25 · 2 = 12 900.

Tieto čísla nám dávajú príliš veľké výsledky, preto by sme mohli skúsiť zadávať menšie. Aby sme ale náš výsledok určite našli, poďme na to postupne.

Najmenšie číslice, ktoré vieme dosadiť za písmená **B, A, O** sú 0, 1, 2, ale potom by to nebolo trojciferné číslo. Preto budeme za B dosádzať číslice od 1 a za **A, O** dosadíme číslice tak aby bolo BAO najmenšie, teda 1, 0, 2.

B = 1 102 · 10 · 1 = 1020
B = 2 201 · 20 · 2 = 8040
B = 3 301 · 30 · 3 = 27 090

Môžeme si všimnúť, že čím väčšie je **B** tým väčší je aj výsledok. Ak jedno z čísel, ktoré násobíme zväčšíme, tak sa výsledok zväčší. **B** teda nemôže byť 2, 3 alebo viac, pretože aj najmenšie čísla začínajúce ciframi 2 a 3 dávajú výsledok väčší ako 2002.

Pokračovať preto budeme s **B** = 1, teda 1**AO** · 1**A** · 1 = 2002

(krát 1 ďalej písať nemusíme, nemení výsledok).

Ako ďalšie písmeno skúsime hľadať **A** doplnené postupne **O** = 2,3,4,5,...,9:

A = 0, 102 · 10 = 1020, 103 · 10 = 1030, 104 · 10 = 1040, 105 · 10 = 1050, 109 · 10 = 1090

Vidíme, že aj pre najväčšie **O** sme nedosiahli výsledok 2002, teda **A** = 0 je príliš málo.

Aby sme nemuseli vypisovať každú jednu možnosť, môžeme si napísať najmenšiu a najväčšiu kombináciu čísel pre konkrétne **A**. Všetky ostatné výsledky sa budú nachádzať medzi výsledkami najmenšieho a najväčšieho čísla.

A = 1 byť nemôže, lebo **B** = 1, a rôzne písmená majú byť rôzne číslice.
A = 2, 120 · 12 = 1440, 129 · 12 = 1548
A = 3, 130 · 13 = 1690, 139 · 13 = 1807
A = 4, 140 · 14 = 1960, 149 · 14 = 2086, medzi číslami 1960 a 2086 sa 2002 nachádza, preto **A** je štyri.
A = 5, 150 · 15 = 2250, 159 · 15 = 2385, aj najmenší výsledok je väčší ako 2002, preto **A** nebude päť a viac.

Teraz už vieme, že **A** = 4, naša rovnosť teda vyzerá takto: 14**O** · 14 = 2002. Pretože 2002 : 14 = 143, jediným riešením sú cifry **B = 1, A = 4, O = 3.**

Po určení **B** = 1 môžeme úlohu ďalej riešiť aj pomocou

Prvočíselného rozkladu:

Vieme, že 2002 = 2 · 1001 = 2 · 7 · 143 = 2 · 7 · 11 · 13. Teda chceme prvočísla 2, 7, 11 a 13 použiť a navzájom vynásobiť tak, aby vzniklo 1**AO** · 1**A .** 1 = 2002. Chceme vytvoriť trojciferné číslo 1**AO** a dvojciferné číslo 1**A**.

Pozrime sa na 2-ciferné čísla s rôznymi ciframi začínajúce sa na 1. Ak sa číslo dá zapísať s využitím prvočísel z rozkladu, máme len dve možnosti: 13 a 14 (2 · 7). K nim si napíšme číslo, ktoré vzniklo vynásobením zostávajúcich prvočísel z rozkladu:

Pre 13 je to číslo 2 · 7 · 11 = 154, pre **14 je to číslo 11 · 13 = 143.**

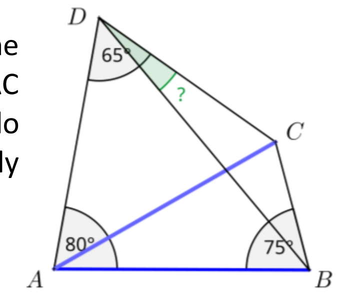
Kombinácia, ktorá spĺňa tvar **BAO** · **BA** · **B** = **2002** je z nich len 143 · 14 · 1, a tak je jediným riešením **B = 1, A = 4, O = 3.**

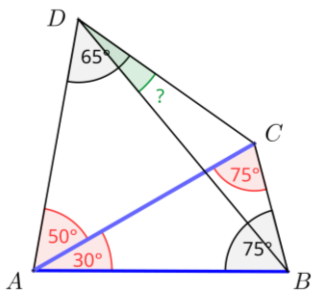
Ďalej sme mali nájsť najbližšie číslo, ktoré je väčšie ako 2002 a tiež má tvar **BAO** · **BA** · **B**. Keďže chceme väčšie číslo od čísla 2002, zväčšíme niektorú cifru v násobení 143 · 14 · 1 tak, aby sa výsledok zmenšil čo najmenej. **B** sa nachádza na mieste stoviek, desiatok a jednotiek. **A** sa nachádza na mieste desiatok a jednotiek. **O** sa nachádza na mieste jednotiek. Preto **O** zmení výsledok najmenej.

Ak **O** zväčšíme o 1, násobenie by vyzeralo ako 144 · 14 · 1 = 2016, čo ale nie je správne, lebo **A** aj **O** majú hodnotu 4. Preto **O** zväčšíme o 2, a dostaneme 145 · 14 · 1 = **2030.** To je teda najmenšie väčšie číslo od 2002, ktoré spĺňa tvar **BAO** · **BA** · **B** = **2*****.

***Úloha č. 4** (opravovala Števka Glevitzká)*

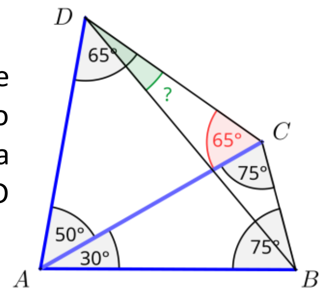
Prvým krokom k riešeniu je určite nakresliť si náčrt, a dokresliť si doňho známe informácie. Okrem veľkostí troch uhlov to zahŕňa aj informáciu, že úsečky AB a AC sú rovnako dlhé, preto sme ich obe zakreslili modrou. Vďaka tomu by nám mohlo udrieť do očí, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC. Preto majú uhly ABC a ACB rovnakú veľkosť, teda $|\sphericalangle ABC| = 75^\circ$.

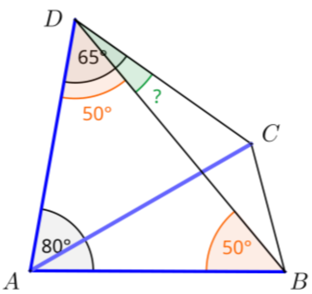




Keďže súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180° (tento fakt ešte nejedenkrát použijeme), vieme dopočítať zvyšný uhol v trojuholníku ABC, teda dostaneme $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$. Poznáme aj veľkosť uhla BAD, preto ľahko dopočítame, že $|\sphericalangle CAD| = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$. Novo zistené uhly sme si zakreslili červenou.

Tak sa ďalej môžeme pozrieť na trojuholník ACD, lebo v ňom už poznáme veľkosti dvoch uhlov. Chýba už iba veľkosť uhla ACD, a tak ľahko spočítame $|\sphericalangle ACD| = 180^\circ - |\sphericalangle DAC| - |\sphericalangle CDA| = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ$. Vyšla nám rovnaká veľkosť akú má uhol CDA, a preto vieme povedať, že trojuholník ACD je rovnoramenný so základňou CD. Teda aj úsečky AD a AC sú rovnako dlhé.





Vieme, že $|AB| = |AC| = |AD|$, a teda aj trojuholník ABD je rovnoramenný so základňou BD. Preto sú uhly ABD a ADB rovnako veľké. A keďže veľkosť tretieho uhla v tomto trojuholníku poznáme, (opäť využitím že súčet uhlov v trojuholníku je 180°) ľahko dorátame, že $100^\circ = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle ADB| = 2|\sphericalangle ADB|$, a teda $|\sphericalangle ADB| = 50^\circ$. Teraz už vieme vyrátať hľadaný uhol $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ADB| = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ$ a máme hotovo.

Uhol BDC má veľkosť 15°.

Na záver by som ešte poznamenala, že veľa z riešiteľov (na moje prekvapenie) riešilo úlohu kúsok inak. Tento postup využíva nie až tak známy fakt, že súčet vnútorných uhlov v akomkoľvek štvoruholníku je 360°. Vďaka tomu si vedeli vypočítať veľkosť uhla BCD. Následne, keď zistili aj veľkosť uhla ACB (tak ako je popísané vyššie), tak potom vedeli rýchlejšie dopočítať veľkosť uhla ACD. Zvyšok riešenia je rovnaký.