JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2023/2024, 3. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovali Lenka a Miro Hudecovci**)**

Sancho ide z domu (miesto A) do divadla (miesto B), ktoré má začať o 19:00 a cesta tam mu trvá presne 20 minút. A → B = 20 minút.

Tentokrát si však v zatiaľ neznámom bode R uvedomil, že doma zabudol rekvizity.

Keby Sancho pokračoval ďalej v ceste do divadla, prišiel by 8 minút pred začiatkom predstavenia, čiže 18:52. Z toho vyplýva, že z domu vyrazil o 20 minút skôr, čo je 18:32.

Ak by sa Sancho po rekvizity vrátil, prišiel by 10 minút po začatí predstavenia, čiže 19:10 a celá cesta by mu trvala tým padom 38 minút.

Ak sa Sancho vracia po rekvizity, prejde naviac dvakrát úsek z domu po miesto, kde si uvedomil, že rekvizity zabudol. Jeho cesta vyzerá takto:

A → R, R → A, A → B.

Vieme, že A → B trvá 20 minút, takže chôdza naviac kvôli rekvizitám trvá 38 − 20 = 18 minút. A teda 18 : 2 = 9 je čas, ktorý mu trvalo, kým si uvedomil, že rekvizity zabudol.

Keďže celá cesta trvá 20 minút, Sancho si spomenul na rekvizity v 9/20 z cesty z domu do divadla.

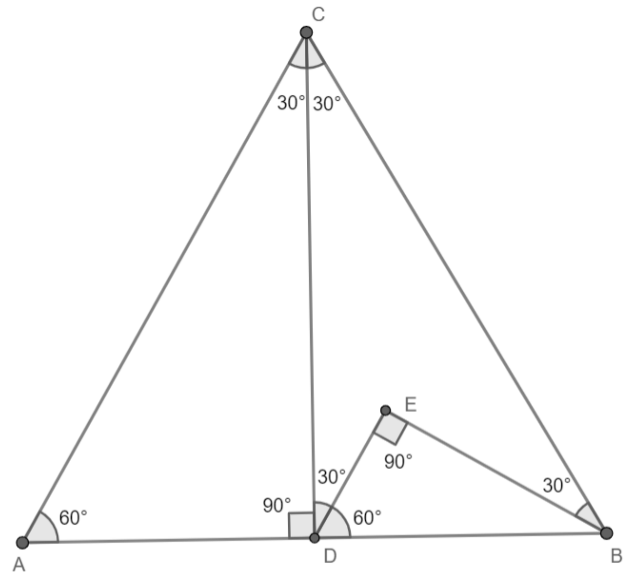
Úloha č. 2 (opravovala Betka Bohiníková**)**

Keďže pódium je pravidelný 6-uholník, vieme, že je možné rozdeliť ho na 6 rovnostanných trojuholníkov. Následne, keď si všimneme, že v zadaní je napísané, že každá šípka má jeden vrchol v strede a jeden v jednom z vrcholov nášho 6-uholníka a všetky šípky sú identické, môžeme sa zamerať iba na jeden z trojuholníkov. Ak zistíme, aká časť jedného trojuholníka bude blikajúca, budeme vedieť, že taká istá časť celého pódia bliká.

Označme si náš trojuholník ABC, a štvoruholník šípky BCDE. Zamerajme sa najprv na uhly. Zo zadania vieme, že všetky ostré vnútorné uhly v šípke sú 30°. Taktiež vieme, že v rovnostrannom trojuholníku sú všetky uhly rovnaké a ich veľkosť je 60°, a že súčet uhlov v každom trojuholníku je 180°. Na základe týchto informácií vieme dopočítať uhly v trojuholníku ADC a DEB. Keďže uhol ADC je 90°, vieme, že CD je výška trojuholníka ABC. Keďže ide o rovnostranný trojuholník, je to zároveň aj ťažnica. Vieme teda, že D je stred strany AB.

Po dopočítaní uhlov vidíme, že trojuholníky ADC a DEB majú rovnaké uhly, sú teda podobné. Keďže ABC je rovnostranný, vieme, že dĺžka AC je rovnaká ako AB. Ak je D stredom AB, vieme, že DB ma polovičnú dĺžku AC. A pokiaľ v podobných trojuholníkoch je prepona jedného trojuholníka 2-krát menšia ako prepona druhého, platí to pre všetky jeho strany. Trojuholník DEB má teda každú stranu polovičnú oproti ADC, a teda je jeho obsah 4-krát menší (premyslite si prečo).

Ak je teda obsah trojuholníka ADC polovica z obsahu trojuholníka ABC, tak obsah trojuholníka DEB je osminou obsahu trojuholníka ABC. Obsah šípky BCDE sú tým pádom ⅜ z obsahu trojuholníka ABC.



Blikajú teda ⅜ celého pódia.

Úloha č. 3 (opravovali Iva Jančigová a Matej Grochal**)**

Na otvorenie knihy Antičarov potrebujeme nájsť tajné 8-ciferné číslo, ktorého prvé dvojčíslie je deliteľné dvoma, prvé trojčíslie je deliteľné tromi a tak ďalej, až po celé tajné číslo, ktoré je deliteľné ôsmimi.

Niektorí/é z vás vyskúšali (veľmi) veľa možností. Tak sa tajné číslo síce tiež dá nájsť, ale je potrebné pri tom ukázať spoľahlivý systém, z ktorého vyplýva, že sa na žiadnu možnosť nezabudlo, pretože čísel spĺňajúcich podmienky by mohlo byť aj viac. Pri riešení úloh platí, že čím viac možností na skúšanie, tým viac sa oplatia logické úvahy (v tejto úlohe také, ktoré súvisia s pravidlami deliteľnosti), ktoré počet možností na skúšanie znížia.

Začneme cifrou na piatej pozícii, pretože vieme, že prvé päťčíslie musí byť deliteľné piatimi. Číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď je jeho posledná cifra 0 alebo 5. My máme k dispozícii cifry od 1 po 8 (každú práve raz), preto piata cifra tajného čísla určite musí byť 5: _ _ _ _ 5 _ _ _

Čísla deliteľné dvoma sú párne, preto druhá cifra tajného čísla musí byť párna. Podobne, čísla deliteľné štyrmi, šiestimi a ôsmimi musia byť párne. Keďže máme práve štyri párne cifry, ich pozície sú týmto jednoznačne určené a tajné číslo si vieme zapísať takto: N P N P 5 P N P.

Ďalej použijeme deliteľnosť tromi (práve vtedy, keď je ciferný súčet čísla deliteľný tromi) a šiestimi (práve vtedy, keď je číslo párne a zároveň deliteľné tromi). Z toho vieme, že súčet prvých troch cifier tajného čísla je deliteľný tromi. A keďže súčet prvých šiestich musí byť tiež deliteľný tromi, z toho vyplýva, že aj druhé trojčíslie (cifry na štvrtom, piatom a šiestom mieste) má ciferný súčet deliteľný tromi.

Vieme, že druhé trojčíslie je v tvare P 5 P, a že súčet dvoch párnych a jednej nepárnej cifry dá nepárny výsledok. Preto vieme, že trojčíslie P 5 P bude mať ciferný súčet rovný nepárnemu násobku čísla 3. Tento násobok môže byť len 15, nakoľko najmenší ciferný súčet, ktorý vieme vytvoriť je 2 + 5 + 4 = 11 a najväčší možný je 8 + 5 + 6 = 19. Ciferný súčet 15 vieme vytvoriť pomocou cifier 2, 5 a 8 alebo 4, 5 a 6, teda pre druhé trojčíslie nášho tajného čísla máme len jednu z týchto štyroch možností: 258, 852, 456, 654.

Ciferný súčet celého čísla (1 + 2 + … + 8 = 36) je deliteľný tromi, súčet prvých šiestich cifier je deliteľný tromi, preto aj posledné dvojčíslie musí byť deliteľné tromi. Pre deliteľnosť ôsmimi platí, že posledné trojčíslie musí byť deliteľné ôsmimi. Vieme, že prvá cifra posledného trojčíslia je párna, preto posledné trojčíslie má párny počet stoviek, možnosti sú: 200, 400, 600, 800. Tieto stovky sú deliteľné ôsmimi, preto aj posledné dve cifry musia byť deliteľné ôsmimi. Čiže posledné dve cifry v tvare N P sú deliteľné aj tromi, aj ôsmimi, čo z možností ~~24~~, ~~48~~, 72 spĺňa iba dvojica 72. O tajnom čísle teda zatiaľ vieme, že je v tvare N P N P 5 P 7 2.

Keďže sme už použili cifru 2, ostávajú nám len dve možnosti pre druhé trojčíslie, ktoré ju neobsahujú: 456 alebo 654. Na prvé trojčíslie nám ostávajú cifry 1, 3 a 8, a keďže má byť v tvare N P N, tak môžu byť len v poradí 183 alebo 381.

Číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď je jeho posledné dvojčíslie (v našom prípade číslo tvorené treťou a štvrtou cifrou tajného čísla) deliteľné štyrmi. Preto, či už by bolo prvé trojčíslie 183 alebo 381, za ním môže nasledovať len trojčíslie 654.

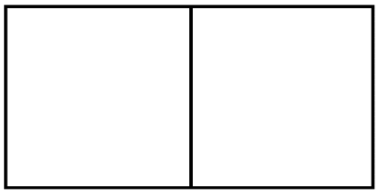
Takže zatiaľ máme pre tajné čislo dve možnosti: 18365472 a 38165472, ale ešte sme nepoužili deliteľnosť siedmimi pre prvé sedemčíslie. Táto deliteľnosť sa pre naše dve možnosti najjednoduchšie overí priamo delením a zistíme, že sedemčíslie 1836547 nevyhovuje.

Existuje práve jedno tajné číslo, a to 38165472.

Úloha č. 4 (opravovala Denisa Múthová**)**

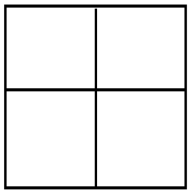
Našou úlohou je zistiť, na aké počty menších štvorčekov sa dá rozdeliť štvorec, a popísať na aké počty sa to nedá. Ako si vieme rozdeliť doštičku, aby nám vznikli vnútri len štvorce? Musíme kresliť čiary rovnobežné so stranami štvorca.

Štvorec nevieme rozdeliť na 2 menšie štvorčeky, lebo spojením 2 rovnakých štvorčekov nám vznikne vždy obdĺžnik.

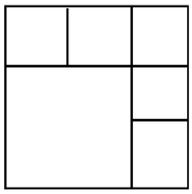


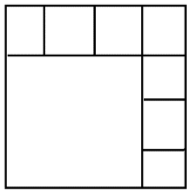
Z podobného dôvodu nevieme štvorec rozdeliť ani na 3 menšie štvorce. Tieto by mohli byť buď všetky tri v riadku vedľa seba (čo by vytvorilo obdĺžnik), alebo dva vedľa seba a jeden navrchu (môžeme si rozmyslieť, že takto by sme taktiež tri štvorce vedeli spojiť jedine do obdĺžnika). Podobnou úvahou vieme vylúčiť aj rozdelenie na 5 štvorčekov.

Rôznymi úvahami alebo skúšaním vieme prísť na to, že všetky ostatné rozdelenia sa vyskladať dajú. Najprv si ukážeme, ako vieme štvorec rozdeliť na párny počet štvorčekov. Jednoducho vieme začať nakreslením „kríža” do štvorca. Takto dostaneme rozdelenie na 4 štvorčeky.

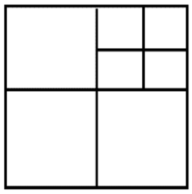


Rozdelenie na 6 štvorčekov vieme získať pridaním jedného štvorčeka do horného riadku a jedného štvorčeka do pravého stĺpca. Podobným postupom vieme získať rozdelenie na 8 štvorčekov, 10, 12, atď. pre všetky párne čísla.





Rozdelenie na nepárne čísla vieme odvodiť ľahko od párnych. Ak potrebujeme napr. rozdeliť štvorec na 7 častí, zoberieme si 4 štvorce a nakreslíme do jedného z nich kríž. Podobne pre 9 častí vieme zobrať 6 štvorčekov, a nakresliť do jedného z nich kríž. Všeobecne, pre každé rozdelenie na nepárny počet štvorčekov si zoberieme rozdelenie, ktoré má o tri štvorčeky menej, a nakreslíme do neho kríž.



Tým pádom si vieme od rozdelenia štvorca na 6 štvorčekov vytvoriť celú rádu až do nekonečna.

Vieme vytvoriť rozdelenie na 1 a 4 štvorčeky, a všetky rozdelenia od 6 štvorčekov až do nekonečna. Nedokážeme vytvoriť 2, 3 a 5 štvorčekov zo štvorca.