SEZAMKO 2017/2018, Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMKA. Laura a Marek sa veľmi potešil všetkým vašim riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ďalšími problémami, na ktoré natrafia v jaskyni Temná hviezda. Popri počítaní nových úloh si môžete rozhýbať vaše matematické svaly pri čítaní týchto vzorových riešení.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Skontrolujte si, či máte vo výsledkovej listine správne údaje a ak nie, dajte nám vedieť, opravíme. A nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKa.

***Príklad č. 1** (opravovali Kika Kovalčíková a Anežka Pajunková)*

Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. My si ukážeme ten, ktorý použila väčšina z vás. Začnime tým, že si na prstoch odpočítame niekoľko prvých čísel:

Palec	Ukazovák	Prostredník	Prstenník	Malíček
1	2	3	4	5
9	8	7	6	←
→	10	11	12	13
17	16	15	14	←
→	18	19	20	21

Môžeme si všimnúť, že čísla pre každý prst narastajú s určitou pravidelnosťou. Napríklad, čísla na palci sa zväčšujú o osem:

$$1 + 8 = 9 \text{ a } 9 + 8 = 17$$

Inak povedané, sú to násobky čísla 8, ku ktorým treba nakoniec pripočítať číslo 1. Prečo práve násobky čísla 8? Preto, lebo keď začneme odpočítavať prsty na ruke od palca, tak 8-krát ťukneme na nejaký prst, kým sa opäť ocitneme na palci.

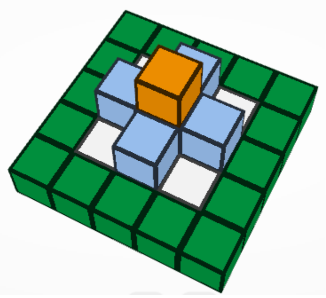
Toto zistenie nám pomôže nájsť posledné číslo menšie ako 3087, pri ktorom si Marek ťukol na palec. Koľko krát Marek prešiel po ruke tam a späť? Na jednu takúto *otočku* potrebuje 8 ťuknutí. Takže ak si ťukol do prstov dohromady 3087 krát, počet *otočiek* vypočítame ako 3087 ÷ 8. Výsledok je 385, so zvyškom 7. Takže Marek urobil 385 celých *otočiek*.

Aké číslo vyšlo na palec? Nejaký násobok čísla 8, ku ktorému nakoniec pripočítame 1. Zoberme teda počet otočiek 385. Najprv vynásobme 8 · 385 = 3080. Keď ešte pripočítame 1, dostaneme 3081. To je číslo, pri ktorom Marek ťukol na palec. Odtiaľto už ľahko dopočítame to, kam padne číslo 3087. Na ukazovák padne 3082, na prostredník 3083, a postupne sa dostaneme k tomu, že 3087 padne na prostredník.

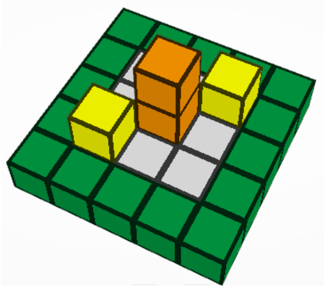
Marek si pri čísle 3087 ťukol na prostredník.

Príklad č. 2 (*opravovali Števka Glevitzká a Hynek Bachratý*)

Pre zostrojenie pyramídy s požadovaným pôdorysom a bokorysmi sa zdalo logické potaviť prvé poschodie z 5 × 5 = 25 kociek, druhé z 3 × 3 = 9 kociek a posledné tretie z jednej kocky v strede. Na to potrebujete 35 kociek, a ak ste pozorne rátali, jej povrch má celkovo 20 + 16 + 12 + 8 + 5 = 61 štvorcových stien, koré boli treba vyčistiť.



V zadaní ale bolo povedané, že stavitelia šetrili a postavili stavbu z najmenšieho možného počtu kociek. Veľa z vás preto skúšalo ubrať kocky. Jedna z možností je na obrázku vľavo. Použili sme len 30 kociek, a môžete sa presvedčiť, že všetky pohľady sú také, aké majú byť. Povrch tejto stavby je 20 + 20 + 12 + 4 + 5 = 61 štorcových stien.

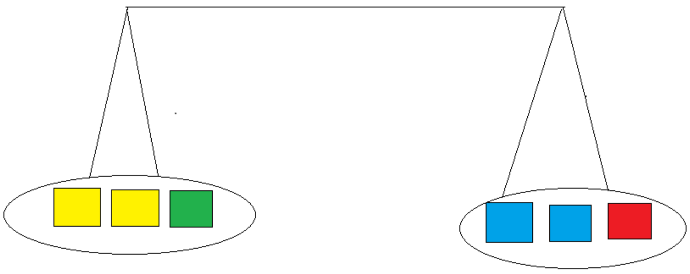


Ani toto ale nebolo najlepšie riešenie. Na obrázku vpravo vidíte, že v skutočnosti stačilo 29 kociek. Skontrolujte si, že stavbu vidíme zo všadial tak, ako bolo v zadaní. Povrch tejto stavby je 20 (boky prvého poschodia) + 22 (vrch prvého poschodia) + 12 (boky 2. poschodia) + 2 (vrch 2 poschodia) + 5 (povrch celého 3. poschodia), spolu 61 štvorcových stien.

Stavba pôvodných obyvateľov jaskyne je zložená z 29 kociek a na jej povrchu bolo treba očistiť 61 štvorcových stien.

Príklad č. 3 (*opravovala Denisa Múthová*)

Máme 10 „nie obyčajných" kociek a to 2 žlté, 2 zelené, 2 biele, 2 modré a 2 červené. Kocky jednej farby sú o 1 kilo ťažšie ako všetky ostatné rovnako ťažké kocky. Pomocou dvojramenných váh chceme zistiť farbu tých ťažších. Koľko vážení na to potrebujeme? Dá sa to aj na jedno váženie?



Vieme, že váhy vedia ukázať, či je na oboch stranách rovnaká záťaž alebo o koľko je niektorá zo strán váh ťažšia. Ak dáme na jednu stranu váh len po jednej, či po dvoch kockách, na jedno váženie sa nám to nepodarí (minimálne na dve, ako si skúste sami).

Skúsme mať skvelý nápad a dať naraz tri kocky na každú zo strán. Konkrétne na ľavú stranu dve žlté a jednu zelenú kocku a na pravú stranu dve modré a jednu červenú kocku (bielu kocku sme vôbec nepoužili). Potom môže nastať týchto päť možností:

1. obe strany váh vážia rovnako, a teda biela kocka musí vážiť o kilo viacej,
2. naľavo sú o 2 kilá viac ako na pravej strane, a teda žltá kocka musí vážiť o kilo viacej,
3. naľavo je o 1 kilo viac ako na pravej strane, a teda zelená kocka musí vážiť o kilo viacej,
4. napravo sú o 2 kilá viac ako na ľavej strane, a teda modrá kocka musí vážiť o kilo viacej,
5. napravo je o 1 kilo viac ako na ľavej strane, a teda červená kocka musí vážiť o kilo viacej.

Jediným vážením sa nám takto podarí zistiť, ktorá farba váži o kilo viac. Veľa z vás kombinovalo rôzne farby kociek na niektorej zo strán váh, no to ešte nemuselo stačiť. Podstatný super nápad bol dať dve kocky rovnakej farby na každú zo strán váh.

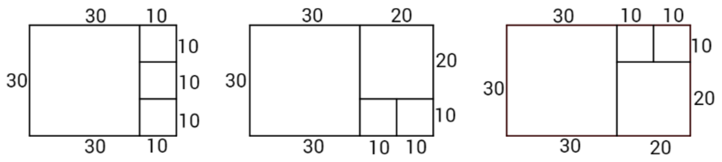
Na dvojramenných váhach sa dá zistiť, ktorá farba je najťažšia, už po prvom vážení.

Príklad č. 4 (*opravovali Nina Benková a Betka Bohiniková****)***

Najväčší štvorec má obsah 900 cm^2. Z toho vieme vypočítať dĺžku jeho strany, čo je 30 cm (lebo 30 · 30 = 900). Každý z obdĺžnikových vstupov bol rozdelený na 4 štvorce. Pozrime sa postupne na situácie, ak by tento obdĺžnik obsahoval 1, 2, 3 alebo 4 štvorce s dĺžkou strany 30 cm (tzv. veľké štvorce).

Ak by obsahoval len 1 veľký štvorec:

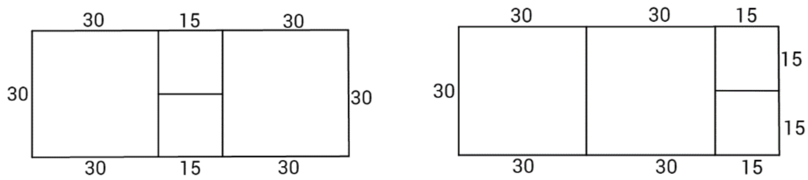
Tu máme 3 základné možnosti rozdelenia mreží. Mreže môžu mať v poradí rozmery 30×40, 30×50, 30×50.



Každú z týchto troch možností vieme ešte pootáčať do troch rôznych smerov. Spolu teda dostaneme 12 možností.

Ak by obdĺžnik obsahoval 2 veľké štvorce:

Máme dve základné možnosti rozdelenia mreží. V oboch prípadoch majú rozmery 30×75.

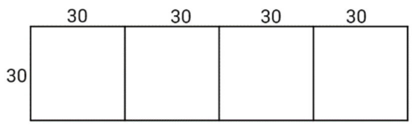


Pootáčaním týchto možností dostaneme ďalšie 4 otočenia. Čiže pri dvoch veľkých štvorcoch máme dokopy 6 možností.

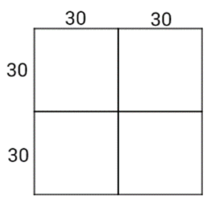
Ak by obdĺžnik obsahoval 3 veľké štvorce:

Tieto štvorce vieme poukladať za sebou, alebo do L-ka. Avšak ani v jednom prípade nevieme umiestniť štvrtý (menší) štvorec tak, aby nám vznikol obdĺžnik.

Ak by obdĺžnik obsahoval 4 veľké štvorce:



V tomto prípade máme 2 základné možnosti rozdelenia mreží. Prvé má rozmery 120×30.



Toto rozdelenie vieme ešte zvislo otočiť, čím dostaneme ďalšiu možnosť.

Pri druhej možnosti bude vchod do chodby v tvare štvorca. Ale to nám nevadí. Štvorec spĺňa všetky vlastnosti, ktoré má spĺňať obdĺžnik. Takže štvorec považujeme za špeciálny prípad obdĺžnika a dostávame ešte jednu možnosť.

Pri štyroch veľkých štvorcoch máme spolu 3 možnosti.

Obdĺžnikové vstupy do chodby mohli mať 5 rôznych rozmerov, a to: 30×40, 30×50, 30×75, 30×120 a 60×60. Mreže mohli vstupy rozdeliť 21 spôsobmi, takže Marek musel dávať naozaj veľký pozor, aby sa pri objavovaní chodieb nestratil.