

JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU
SEZAMKO, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,

spolu s druhou sériou sa končí aj zimná korešpondenčná časť SEZAMKA. Alica a Maťo vám všetkým ďakujú za pomoc pri riešení problémov, na ktoré natrafili. Pred vianočnými prázdninami si môžete precvičiť vaše matematické bunky prečítaním týchto vzorových riešení.

Ale úplným záverom súťaže je stretnutie riešiteľov Sezamka 10.12.2016 v Žiline! Pozvánku máte priloženú v obálke.

A všetci, aj tí, ktorým sa do Žiliny nebude dať prísť, sa môžu v januári tešiť na obálku, v ktorej budú zadania prvej letnej časti.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Ika Bachratá)

Sú tri možnosti ako môžu byť čísla rozdelené do malého a veľkého kruhu.

Prvá možnosť:	malý kruh: 1,2,4,8,9	veľký kruh: 1,2,3,5,6,7
Druhá možnosť:	malý kruh: 1,2,5,7,9	veľký kruh: 1,2,3,4,6,8
Tretia možnosť:	malý kruh: 1,2,6,7,8	veľký kruh: 1,2,3,4,5,9

Súčet čísel na všetkých dverách je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 1 + 9 + 2 + 8 + 3 + 7 + 4 + 6 + 5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45.$$

Toto ako správne riešenie stačilo. Veľkú pochvalu majú tí, čo našli všetky riešenia. Tí by si zaslúžili aj 6 bodov, ale toľko sa nedáva, tak som na najlepšie riešenia napísala 5+.

Sú však aj ďalšie veci, ktoré sa dali v príklade vymyslieť a napísať: Na strednej spoločnej chodbe vždy vyjdú čísla 1 a 2. Je to preto, že čísla dverí na spojovacej chodbe sa zarátajú do veľkého aj do malého kruhu. V súčte $24 + 24 = 48$ sú teda čísla zo spojovacej chodby zarátané dva krát a všetky ostatné čísla presne raz.

Súčet čísel na spojovacej chodbe je preto $48 - 45 = 3$. To vyjde len ak tam dáme čísla 1 a 2, lebo všetky ostatné čísla sú aspoň 3, a teda s každým ďalším číslom už dajú súčet väčší než 3. V malom kruhu sú teda čísla 1, 2 a ešte tri čísla, ktorých súčet je 21. A napísať 21 ako súčet troch čísel od 3 po 9 sa dá len tromi spôsobmi.

Príklad č. 2 (opravovala Maťa Kudelčíková)

Zo zadania vieme 3 informácie. Tvrdenia Betky, Elišky, Mariána a Lukáša, to že jeden z nich klamal a to, že traja z nich majú zelené oči a jeden modré. Ako teda zistiť kto klamal a aké majú oči? Podme si prejsť všetky možnosti toho, kto by mohol klamať a ako by to vyzeralo.

1. Ak by klamala Betka: mala by modré oči a ostatní by hovorili pravdu. Takže Eliška by mala modré oči, Marián zelené a Lukáš modré alebo zelené. Vidíme, že toto naše riešenie nebude, pretože modré oči by mali aspoň dvaja (Betka a Eliška).
2. Ak by klamala Eliška: mala by zelené oči, Betka a Marián by mali tiež zelené a Lukáš by mohol mať modré alebo zelené. Keďže potrebujeme, aby mali traja ľudia zelené a jeden modré oči, Lukáš by mal modré. Táto možnosť sedí so všetkými podmienkami.
3. Ak by klamal Marián: mal by modré oči, Betka by mala zelené, Eliška modré. To opäť neseďí, modré oči nemôže mať viac ako 1 človek.
4. Ak by klamal Lukáš: mal by hnedé oči, čo vôbec neseďí so zadaním.

Preto klamať musela Eliška, čiže Betka, Eliška a Marián majú zelené oči a Lukáš má modré oči.

Príklad č. 3 (opravoval Hynek Bachratý)

Najjednoduchšie a zároveň najspôhlivejšie riešenie bolo vypísať všetky možné rôzne spôsoby, ako lístok (dvomi a potom tromi dierkami) označiť. Aby ste sa tak dostali k správne riešeniu, boli dôležité tri veci:

- Uvedomiť si, že lístok s dierkami v 1 a 2 je označený tak isto, ako lístok so značkami 2 a 1. Podobne lístok s dierkami 1/2/3, 1/3/2, 2/1/3 atď. je označený stále tak isto. Nezáleží teda na poradí, v akom si označené dierky zapíšeme alebo poznačíme.
- Dierky sú na rôznych miestach, lístok preto nemôžeme byť označený 1/1 alebo 7/7, ani 2/2/4 alebo 3/3/3.
- Pri vypisovaní možností označenia je dôležité zvoliť si dobrý systém, vďaka ktorému na žiadny lístok nezabudnete, nezapíšete žiadny zlý, a žiadne rovnaké označenie nezapíšete viackrát.

Skoro všetci ste na nič z tohto nezabudli a našli správne riešenie. Najlepší systém bol zapisovať cvaknuté dierky usporiadané od najmenšej po najväčšiu, oddeľovať skupiny podľa začiatočných dierok, a zapisovať si počtu jednotlivých skupín. Takže nasleduje zápis, ktorý použila väčšina z Vás.

Dve dierky:

1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8	Spolu 7	5/6, 5/7, 5/8	Spolu 3
2/3, 2/4, 2/5, 2/6, 2/7, 2/8	Spolu 6	6/7, 6/8	Spolu 2
3/4, 3/5, 3/6, 3/7, 3/8	Spolu 5	7/8	Spolu 1
4/5, 4/6, 4/7, 4/8	Spolu 4		

Všetkých pre dve dierky je dokopy $7+6+5+4+3+2+1=28$

Tri dierky:

1/2/3 , 1/2/4, 1/2/5, 1/2/6, 1/2/7, 1/2/8	3/4/5 , 3/4/6, 3/4/7, 3/4/8
1/3/4 , 1/3/5, 1/3/6, 1/3/7, 1/3/8	3/5/6 , 3/5/7, 3/5/8
1/4/5 , 1/4/6, 1/4/7, 1/4/8	3/6/7 , 3/6/8
1/5/6 , 1/5/7, 1/5/8	3/7/8
1/6/7 , 1/6/8	Spolu s 3 na začiatku $4+3+2+1=10$
1/7/8	
Spolu s 1 na začiatku $6+5+4+3+2+1=21$	4/5/6 , 4/5/7, 4/5/8
	4/6/7 , 4/6/8
2/3/4 , 2/3/5, 2/3/6, 2/3/7, 2/3/8	4/7/8
2/4/5 , 2/4/6, 2/4/7, 2/4/8	Spolu s 4 na začiatku $3+2+1=6$
2/5/6 , 2/5/7, 2/5/8	
2/6/7 , 2/6/8	5/6/7 , 5/6/8, 5/7/8
2/7/8	Spolu s 5 na začiatku $2+1=3$
Spolu s 2 na začiatku $5+4+3+2+1=15$	
	6/7/8
	Spolu s 6 na začiatku 1

Celkovo pre tri dierky $21+15+10+6+3+1=56$.

Príklad č. 4 (opravovala Kika Kovalčíková)

Označme si najprv päť kusov torty písmenami A, B, C, D a E. Najskôr chceme zistiť, ktorá časť torty je rovnako veľká ako kúsok B, ktorý dostal Maťo. Potom treba zistiť, ktoré dve časti sú rovnako veľké, aby sme ich mohli rozdeliť medzi rodičov. Môžeme si všimnúť, že torta je rozdelená uhlopriečkou na dve rovnaké časti:

$$A + B = C + D + E = \text{pol torty}$$

Okrem toho sa dá torta rozdeliť na polovicu ešte inak. Dve čiary na ďalšom obrázku delia pravý aj ľavý obdĺžnik na dve rovnaké časti, teda aj celý štvorec je takto rozdelený na dve polovice:

$$B + D = A + C + E = \text{pol torty}$$

Ak skombinujeme obidve tieto rovnice, dostaneme $A + B = B + D$. Pretože B je na oboch stranách rovnosti, aj časti A a D sú rovnako veľké. Ďalej, ak pozrieme ešte raz na prvé dve rovnice, dostaneme aj toto:

$$B + D = C + D + E, \text{ z čoho je vidieť, že } B = C + E.$$

Kúsok torty označený ako B je pre Maťu, a kúsky C a E sú rovnako veľké, tie teda dostane Alica. Zostávajúce kúsky, A a D, sú tiež rovnako veľké. Tieto dva si medzi sebou rozdelia rodičia.

