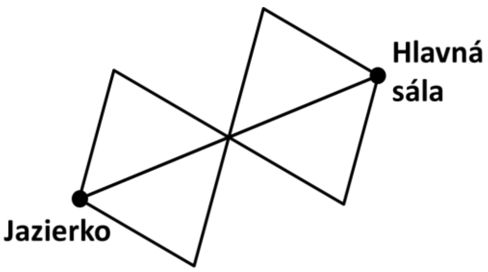
SEZAMKO 2017/2018, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Milí riešitelia,
opäť nám prišla kopa zaujímavých riešení. Lauru a Mareka vaša pomoc veľmi potešila. Netreba však nič nechať na náhodu a treba naďalej namáhať svoje matematické svaly. K tomu vám isto pomôžu tieto vzorové riešenia, hlavne ak si ich poriadne prečítate.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMKOVI nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKA.

*Príklad č. 1 (*opravovali Veronika Hucíková a Hynek Bachratý*)*



Na obrázku si pripomeňme zadanie. Od J(azierka) sa chceme dostať ku HS(Hlavnej sále) po chodbách jaskyne. Bod v strede nazvime K(rižovatka). Každú cestičku pritom smieme prejsť len jeden krát, a keď sa dostaneme do HS, cestu ukončíme a nesmieme už pokračovať ďalej. Otázka bola, koľkými spôsobmi sa môžeme dostať od J do HS.

Najskôr sa zamyslíme na posledným kúskom každej cesty, keď sa od K už rozhodneme pokračovať do HS. Nech sme sa do K dostali hocakým spôsobom, smerom do HS potom môžeme pokračovať presne **tromi rôznymi cestami**: hornou, strednou alebo dolnou. Iné cesty v druhej časti jaskyne neexistujú, lebo každou z nich sa dostaneme do HS, takže tam musíme skončiť.

Koľko je teraz začiatkov ciest, ktorými môžeme prejsť prvú časť jaskyne z J do K? Aj tu máme hornú (H), strednú (S) a dolnú (D)cestičku. Sú tu **tri krátke priame cesty** H, S alebo D cestičkami, po ktorých už z K pokračujeme do HS.

Keď sa ale prvýkrát dostaneme napríklad H cestičkou na K, môžeme sa ešte vrátiť nepoužitými cestičkami nazad ku J a ešte raz do K. Dá sa to **dvomi spôsobmi**: (J),H,(K),S,(J),D alebo (J),H,(K),D,(J),S. Podobne sa dá **dvomi spôsobmi** s návratom začať cestičkou S: S,H,D alebo S,D,H a **dvomi spôsobmi** s návratom začať cestičkou D: D,H,S a D,S,H.

Celkovo sa teda z J do K vieme dostať 3 + 2 + 2 + 2 = 9 spôsobmi, a každý takýto začiatok cesty môže pokračovať tromi rôznymi spôsobmi v druhej polovici jaskyne. Celkový počet cestičiek je preto 9 · 3 = 27.

Od jazierka do hlavnej sály existuje 27 ciest.

*Príklad č. 2 (*opravovala Nina Benková*)*

Mali sme zistiť, aký najväčší a aký najmenší súčet môže mať sčítanie AT+IRU=TAM, ak nahradíme rovnaké písmena rovnakými číslicami a rôzne písmena rôznymi, pričom žiadne z čísel nesmie začínať nulou. Pre lepšiu prehľadnosť si napíšme sčítanie pod seba.

$$\begin{array}{r} AT \\ \underline{IRU} \\ TAM \end{array}$$

V prvom kroku sa môžeme pozrieť napr. na stĺpček A + R = A. Kedy toto platí? Jedine v prípade, že k číslici A pripočítame 0 alebo 10, tak nám ostane vo výsledku A. Čiže R bude buď 0 alebo 9 (+zv.1, ktorý nám ostane ak T + U ≥ 10). Pozrime sa najskôr čo sa stane, ak R = 0. V tomto prípade A + R môže byť najviac 9, čiže nám určite neostane žiaden zvyšok, ktorý by sme pripočítali potom k stovkám. Z toho vidno, že I = T, ale to je v rozpore so zadaním. Takže R bude určite 9 a T + U ≥ 10, aby sme získali potrebný zvyšok k A+R.

Pri hľadaní najväčšieho TAM sa snažíme dosadiť do výsledku postupne od stoviek čo najväčšie číslice. Číslica 9 je už obsadené (R = 9), tak skúsime za T dosadiť 8. Potom I musí byť 7, lebo zo súčtu A + R na mieste desiatok dostaneme zvyšok 1 (premyslite si prečo). Najväčšia, ešte neobsadená číslica, nám ostala 6, dosadíme ju za A. Za M vieme dosadiť najviac 5 (8 + U = 15), avšak potom sa U = 7 a číslica 7 je už použitá na I. Tak teda skúsime dosadiť M=4 (8 + U = 14), vtedy sa ale U = 6 a 6 je už použitá na A. Ďalšie v poradí je M = 3 (8 + U = 13), U = 5 a to vyhovuje. ***Najväčšie možné TAM je 863.***

Najmenšie TAM hľadáme podobne, akurát, že teraz chceme do výsledku postupne od stoviek dosádzať čo najmenšie čísla. Za T nemôžeme dosadiť 1, lebo potom by sa I rovnalo 0. Skúsime teda T = 2. Potom dostaneme I = 1. Najmenšia ešte nepoužitá číslica okrem 0 je 3, skúsime ju dosadiť za A (premyslite si prečo A nemôže byť 0). Za M už môžeme dosadiť aj 0. Ak M = 0 (2 + U = 10), tak U = 8 a to vyhovuje. ***Najmenšie možné TAM je 230.***

Príklad č. 3 (*opravovali Robka Juríková a Timea Jakubócyová*)

Medzi troch súrodencov chceme rozdeliť žabu, škrečka, jaštieričku, flautu, gitaru, trúbku, zlato, diamanty a dukáty podľa viacerých podmienok. Tak si ich teda najskôr vypíšme zo zadania:

1) Každý súrodenec dostane jedno zviera, jeden hudobný nástroj a jeden škriatkovský poklad
2) Pikolo dostane žabu
3) Basík dostane dukáty
4) Ten, kto dostane flautu, nesmie dostať zlato
5) Ten, kto dostane škrečka, dostane diamanty
6) Ten, kto dostane jaštieričku, dostane trúbku

Vytvoríme si tabuľku, do ktorej si budeme postupne zaznačovať, čo vieme a na čo sme prišli. Z 2. a 3. podmienky môžeme rovno doplniť Pikolovi žabu a Basíkovi dukáty:

ŠKRIATOK	ZVIERATKO	HUD. NÁSTROJ	Š. POKLAD
Pikolo	žaba		
Basík			dukáty
Hudienka			

Z 5. Podmienky vieme, že škrečok a diamanty dostane jeden škriatok. Ale keďže Pikolo už má zvieratko a Basík už mápoklad, nemôže ani jeden z nich dostať tento balíček (škrečok + diamanty). Takže škrečka a diamanty musí dostať Hudienka:

ŠKRIATOK	ZVIERATKO	HUD. NÁSTROJ	Š. POKLAD
Pikolo	žaba		
Basík			dukáty
Hudienka	škrečok		diamanty

Teraz jedine Basík nemá zvieratko, takže musí obdržať jaštieričku, a teda zároveň s ňou aj trúbku (podľa 6. podmienky). Pikolo je jediný, kto ešte nemá žiadny škriatkovský poklad, teda musí dostať zlato.

ŠKRIATOK	ZVIERATKO	HUD. NÁSTROJ	Š. POKLAD
Pikolo	žaba		zlato
Basík	jaštierička	trúbka	dukáty
Hudienka	škrečok		diamanty

Podľa 4. podmienky nemôže zlato a flautu dostať jeden škriatok. Keďže Pikolo má zlato a Basík už má iný hudobný nástroj (trúbku), musí flauta patriť Hudienke. Posledné, čo zostalo je gitara, ktorá teda pripadla Pikolovi. ***Výsledné rozdelenie darčekov vyzerá takto:***

ŠKRIATOK	ZVIERATKO	HUD. NÁSTROJ	Š. POKLAD
Pikolo	žaba	gitara	zlato
Basík	jaštierička	trúbka	dukáty
Hudienka	škrečok	flauta	diamanty

Príklad č. 4 (*opravovali Števka Glevitzká a Anežka Pajunková*)

Keďže si Basík kúpil 16 vecí za rôzne sumy od 1 po 16 Trojanov, vieme zistiť koľko stoja všetky veci spolu: 1T + 2T + 3T + 4T + … + 16T = 136 Trojanov.

Poďme zistiť, koľko najmenej mincí potrebujeme na vyplatenie tejto sumy. Skúsme použiť čo najviac mincí najväčšej hodnoty 9 Trojanov. Keďže 136 : 9 = 15 zv. 1, tak Basík mohol dostať najviac 15 deväťtrojanov a k tomu 1 jednotrojan, takže dokopy 16 mincí. Ak by dostal menej deväťtrojanov, napríklad 14, tak na vyplatenie zvyšných 10 Trojanov treba aspoň 4 mince (3 trojtrojany a 1 jednotrojan), čo nám dokopy dáva 18 mincí. Podobne, ak by bolo deväťtrojanov ešte menej, tak použitých mincí bude ešte viac. Basík teda dostal 16 mincí, z toho 15 deväťtrojanov a 1 jednotrojan.

Z 15 mincí v hodnote 9 Trojanov môže spotrebovať na priamu platbu najviac 8 mincí v hodnote 9 Trojanov (pri platbe vecí, ktoré stoja 9 až 16 Trojanov). To však znamená, že aspoň 7 mincí v hodnote 9 Trojanov Basík u obchodníkov rozmení. Navyše ich všetky rozmení pri rôznych platbách (ak by napríklad pri platbe 6 Trojanov použil dve mince 9 Trojanov, tak mu obchodník vydá mince s hodnotami 9 Trojanov a 3 Trojany, takže jedna z dvoch mincí 9 Trojanov Basíkovi aj tak ostane). Platieb je dokopy 16, takže platieb bez vydania môže byť najviac 9.

Ukážeme si jeden zo spôsobov, ako to spraviť aby bolo platieb bez vydania presne 9. Na začiatok Basík zaplatí sumy 9T a 1T bez vydania. Potom zaplatí 16T mincami 9T a 9T a vydajú mu mince 1T a 1T, ktorými zaplatí 2T bez vydania. Potom zaplatí 15T mincami 9T a 9T a výdavok použije na zaplatenie sumy 3T. Takto bude postupne pokračovať so sumami 14T a 4T, 13T a 5T, 12T a 6T, 11T a 7T a nakoniec 10T a 8T. Z každej takejto dvojice mu raz vydajú a raz zaplatí presne. Teda naozaj vie zaplatiť 9-krát bez vydania.

Basík dostal 16 mincí, ktorými vie pri nákupoch platiť tak, aby mu vydali presne 9-krát.