SEZAMKO 2016/2017, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Milí riešitelia,
opäť nám prišla kopa zaujímavých riešení. Alicu a Maťa vaša pomoc veľmi potešila. Netreba však nič nechať na náhodu a treba naďalej namáhať svoje matematické svaly. K tomu vám isto pomôžu tieto vzorové riešenia, hlavne ak si ich poriadne prečítate.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk
Veľa úspechov v druhej sérii vám želá personál hotela Nekonečno a organizátori SEZAMKa.
Nezabudnite, že už po druhej sérii sa môžete tešiť na májové sústredenie najlepších riešiteľov.

Príklad č. 1 (opravovala Ivka Hrivová)

Úlohou je nájsť všetky možnosti 5 miestneho telefónneho čísla zloženého z číslic 1, 2, 3, 4 a 5. Podmienky pre toto číslo sú, aby druhá číslica bola väčšia ako prvá a tretia, a aby štvrtá číslica bola väčšia ako tretia a piata. Keďže musíme použiť v tomto čísle všetkých 5 čísel, treba prejsť možnosti tých cifier, ktoré môžu byť na druhom a štvrtom mieste.

Cifry 1 a 2 na týchto pozíciách byť nemôžu, pretože od 1 menšie cifry k dispozícii nie sú, a od 2 je jediná nižšie cifra k dispozícii cifra 1. Keďže čísla na druhom a štvrtom mieste musia mať vedľa seba dve menšie cifry, cifry 1 a 2 sa tam nachádzať nemôžu. Vieme teda, že na týchto dvoch miestach smú byť iba cifry 3, 4 alebo 5.

Cifra 5 musí byť určite na jednom z týchto dvoch miest, pretože žiadne vyššiu cifru v možnostiach nemáme. Ak by sme k nej na druhú význačnú pozíciu vybrali cifry 4, tak okolo nej môže byť ľubovoľné z cifier 1, 2, 3, a teda pri tvorení telefónnych čísel nemáme žiadne výnimky. Takže ak na druhú a štvrtú pozíciu dáme cifry 4 a 5, dostávame tieto možnosti:

14352 14253 24153 24351 34152 34251

A samozrejme dostaneme rovnako veľa možností, keď 4 a 5 navzájom vymeníme:

15342 15243 25143 25341 35142 35241

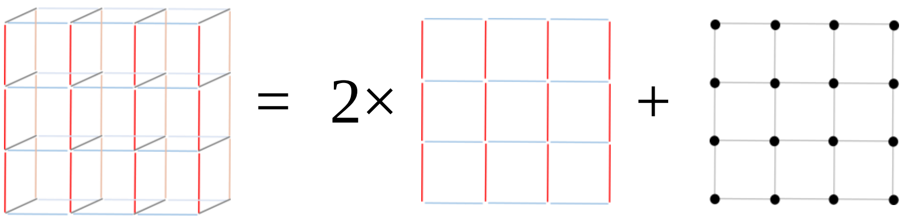
Ak by sme ku cifre 5 dali na význačnú pozíciu cifru 3, jediné obmedzenie, ktoré tým dostávame je, že cifra 4 nesmie byť pri cifre 3. Musí teda byť na kraji, hneď vedľa cifry 5. V tomto prípade dostávame takéto možnosti:

45132 45231 23154 13254

Iné možnosti už nemáme a teda existuje, vzhľadom na dané podmienky 16 rôznych telefónnych čísel.

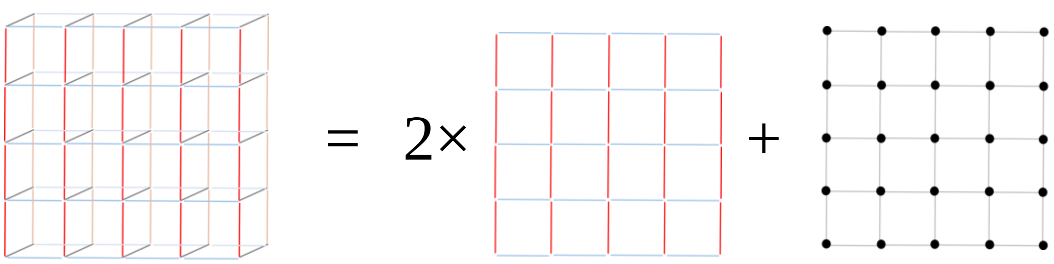
Príklad č. 2 (opravovala Kika Kovalčíková)

Pri riešení tejto úlohy nám môže pomôcť, ak si stenu rozdelíme na viac častí. Napríklad vieme, že predná a zadná časť steny vyzerajú úplne rovnako. Preto stačí, ak spočítame tyče iba pre jednu z nich. Ďalej treba započítať ešte aj tie tyče, ktoré spájajú prednú a zadnú časť steny. Napríklad stena 3×3 sa dá rozložiť na tri časti takto:



Červeno-modré čiary sú tyče na prednej a zadnej strane steny. Čierne guličky sú tyče, ktoré spájajú predok a zadok. Červených tyčí na prednej strane je 12 – po tri tyče v štyroch radoch. Modrých tyčí je tiež 12. Spolu je na prednej strane 24 tyčí. Na zadnej strane bude preto tiež 24 tyčí. Zostáva spočítať, koľko tyčí spája prednú a zadnú časť, teda koľko je čiernych bodiek na obrázku – a tých je 16, štyri bodky v štyroch radoch. ***Spolu na celú stenu 3×3 treba*** 24 + 24 + 16 = ***64 tyčí***.

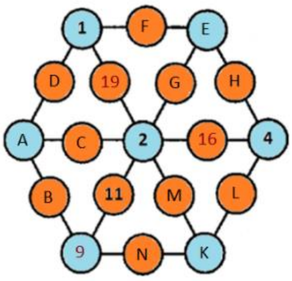
Podobne môžeme spočítať aj počet tyčí pre stenu 4×4:



Červených tyčí na prednej strane je 20, po štyri tyče v piatich radoch. Modrých tyčí je tiež 20. Všetkých tyčí na prednej strane je teda 40, a na zadnej tiež 40. Spojovacích tyčí medzi prednou a zadnou stranou je 25. ***Dokopy nám treba 105 tyčí na konštrukciu steny 4×4.***

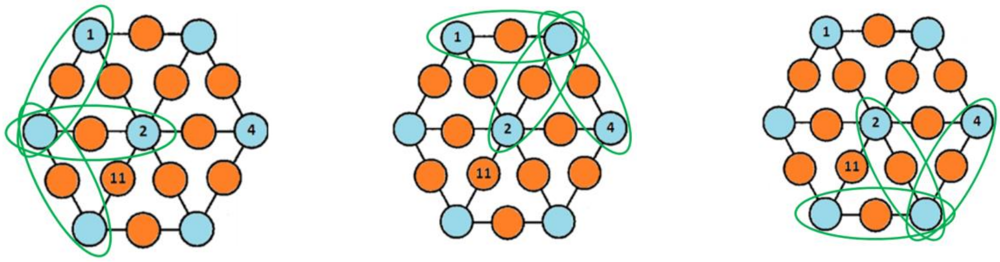
Pre stenu 5×5 môžeme postupovať rovnako. Červených tyčí na prednej strane by bolo 30, po päť tyčí v šiestich radoch. To je spolu 60 tyčí na prednú stranu steny. Na zadnej strane by ich bolo rovnako veľa, tiež 60. Spojovacích tyčí medzi prednou a zadnou stranou je 36, po šesť tyčí v šiestich radoch. ***To je dokopy 156 tyčí pre stenu 5×5.***

Príklad č. 3 (opravovali Nina Benková a Štefka Glevitzká)



Hneď na začiatku sa dali doplniť 3 čísla, a to 19 na úsečke s 1 a 2, 16 na úsečke s 2 a 4, 9 na úsečke s 2 a 11. Potom bolo túto úlohu možné riešiť viacerými spôsobmi.

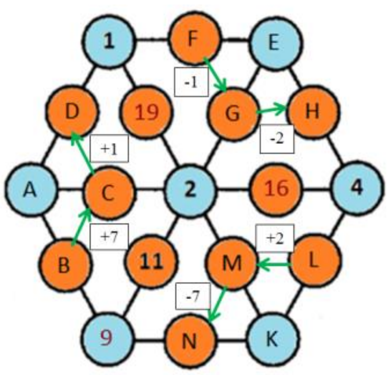
Jedno riešenie: Na každej zo zostávajúcich úsečiek máme už 1 číslo. Keď sa bližšie pozrieme, uvidíme, že tri úsečky majú jedno spoločné (konkrétne modré) políčko. Takéto trojice sú tri a vidíme ich vyznačené na obrázkoch.



Úsečky s políčkami A a B, A a C, A a D, majú spoločné políčko A, voľné políčko a 1 doplnené číslo. Preto keď vpíšeme nejaké číslo do políčka A, vieme potom vypočítať aj čísla na políčkach B, C a D. Keď zas vpíšeme číslo do iného políčka, ktoré je na jednej z trojice úsečiek, vieme dopočítať číslo v políčku A a potom zas aj ostatné políčka v trojici. Teda keď vpíšeme číslo do hociktorého políčka v trojici, vieme dopočítať ostatné. Vieme vždy povedať pri trojiciach BCD, FGH a LMN o koľko sú od seba tieto čísla väčšie alebo menšie, lebo keď sa pozrime napríklad na trojicu vľavo, zistíme si, aký má byť súčet dvoch chýbajúcich čísel na každej úsečke z trojice:

$$22 - 1 = 21, \quad 22 - 2 = 20, \quad 22 - 9 = 13$$

Úsečky s políčkami A, B, s políčkami A, C, a s políčkami A, D majú spoločné políčko A, preto rozdiel čísel v políčkach B, C bude rovnaký ako rozdiel súčtov dvojíc A, B a A, C. Preto je číslo v políčku C o 7 väčšie ako v políčku B (20 – 13 = 7). Podobne úsečky s A, C a A, D majú spoločné políčko A, preto D je o 1 väčšie ako C (21 – 20 = 1). Potom sa pozrieme na zvyšné trojice úsečiek. Trojica vpravo hore má spoločné políčko E a trojica vpravo dole spoločné políčko I. Rovnakým postupom nám vyjde nasledovné:



Napíšeme si 3 tabuľky, v ktorých vypíšeme možnosti, ako môžeme vpísať čísla do políčok jednotlivých trojíc. V tabuľkách sú len vyhovujúce možnosti, resp. možnosti pri ktorých nenastane jeden z nasledujúcich prípadov:

1) Ak by sme doplnili do modrého okienka číslo (napr. na miesto A číslo 1), tak by sa nám toto číslo nachádzalo v tabuľke dvakrát.
2) Ak by sme doplnili do modrého okienka číslo (napr. na miesto A číslo 4), tak by nám na niektorej z úsečiek vyšlo číslo, ktoré sa už v tabuľke nachádza (na miesto C by sme museli doplniť 16 a to už v tabuľke je).
3) Ak by sme doplnili do modrého okienka číslo (napr. na miesto A číslo 13), tak by už vychádzal príliš veľký súčet na niektorej z úsečiek (13 + 9 + B = 22, a to nevyhovuje, pretože za B by bolo treba dosadiť nulu).

Tab. č. 1

A	B	C	D
3	10	17	18
6	7	14	15
7	6	13	14
8	5	12	13

Tab. č. 2

E	F	G	H
3	18	17	15
6	15	14	12
8	13	12	10
13	8	7	5
15	6	5	3

Tab. č. 3

K	L	M	N
3	15	17	10
5	13	15	8
6	12	14	7
8	10	12	5

Teraz musíme nájsť vhodnú kombináciu (z každej tabuľky 1 riadok), aby sa čísla neopakovali. Ak vyberieme prvý riadok tabuľky 1, tak z ostatných tabuliek môžeme vybrať iba nasledujúce riadky, inak by sa čísla opakovali.

E	F	G	H
6	15	14	12
13	8	7	5

K	L	M	N
5	13	15	8
6	12	14	7

Ani jedna kombinácia zvyšných možností však nevyhovuje, lebo sa opakuje jedno z čísel 15, 6, 13, 7. Keď do políčka E vpíšeme 6, do políčok K, L, M, N nevieme vpísať čísla, aby sa neopakovali (opakuje sa 15 alebo 6). Keď do E vpíšeme 13, tak sa nám tiež budú čísla opakovať (13 alebo 7).

Ak vyberieme 2. riadok tabuľky č. 1, z ostatných tabuliek zostane po jednom riadku, ale budú sa opakovať čísla 10 a 12.

E	F	G	H
8	13	12	10

K	L	M	N
8	10	12	5

Podobne, keď vyberieme 4. riadok sa bude opakovať 15 a 17.

E	F	H	G
3	18	17	15

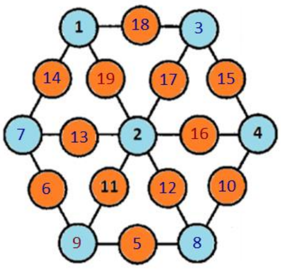
K	L	M	N
3	15	17	10

Ak vyberieme 3. riadok tab. č. 1, zostanú nám možnosti:

E	F	G	H
3	18	17	15

K	L	M	N
3	15	17	10
8	10	12	5

Aby sa čísla neopakovali, do políčka K treba vpísať číslo 8 (inak by sa opakovali čísla 3, 15, 17). Jediným riešením je preto:



Iné riešenia: Nájdeme si pravidlá, ktoré musia v ornamente platiť. Napríklad číslo 10 nemôže byť spolu na úsečke s 2, lebo by sme k nim potom museli dopísať ďalšiu 10. Na úsečke s číslom 9 nemôže byť číslo väčšie ako 12, lebo by sme nevedeli doplniť tretie číslo na úsečke (môžeme povedať, že väčšie ako 10, lebo ak vpíšeme 12, tretie číslo bude 1, ak vpíšeme 11, tak 2 a obe tieto čísla v ornamente už sú). Podobne číslo 18 musí ležať na úsečke s 1, lebo inak by bola na úsečke s číslom 4 alebo 9 a nevedeli by sme k nim dopísať tretie číslo (18 + 9 = 27, 18 + 4 = 22). Ďalej môžeme skúšať systematicky dopĺňať čísla, napríklad z tých, čo sme ešte nedoplnili to najväčšie, lebo sa nedá doplniť všade, podobne ako 18.

Príklad č. 4 (opravoval Hynek Bachratý)

Vieme, že koláče sú len v jedinej z 10 krabičiek, a tiež, že len jediný z nápisov „Vo vedľajšej krabičke sú koláče" na nich je pravdivý. Keď si tieto dve veci dáme dokopy, prídeme na to, že koláče nemôžu byť v žiadnej z krabíc 2. až 9. Každá z nich totiž má dvoch susedov, a keby v nej (napríklad v 4.) koláče boli, na oboch susedných (v tomto príklade na 3. a 5.) by bol pravdivý nápis, čo odporuje zadaniu. Iba ak by koláče boli v jednej z krajných krabíc (1. alebo 10.), pravdivý nápis je len na jedinej susednej (na 2. alebo na 9.), čo vyhovuje.

A ako zistíme, v ktorej z tých dvoch koláče sú? Stačí sa pozrieť napríklad do 1. Buď tam koláče rovno uvidíme, alebo bude prázdna. Vtedy si ale na 100% môžeme byť istý, že koláče sú v druhej z krajných krabíc, teda v 10.