

SEZAMKO 2008/2009, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milé deti,

vonku už pomaly prichádza jar a k vám pomaly prichádza nová séria SEZAMKa. Všetci opravovatelia sa potešili vašim pekným riešeniami. Vy sa teraz môžete potešiť z bodov, ktoré ste za tieto riešenia dostali. Ak tých bodov nebolo veľa, nezúfajte, nabudúce to bude určite lepšie. Nezabudnite si prečítať tieto vzorové riešenia. Prezradia vám, ako sa úloha mala riešiť, kde ste urobili chybu alebo vám ukážu, ako sa dala úloha vyriešiť inak než ste ju riešili vy.

A potom hor sa na štyri nové príklady – tie sú posledné v tejto letnej časti SEZAMKa. Po ich úspešnom vyriešení vás od 4. do 6. júna čaká sústredenie s kopou zábavy, novými kamarátmi a samozrejme matematikou.

Už teraz sa na vás teší posádka kapitána Dlhofúza a aj my, organizátori SEZAMKa.

Úloha 1 (opravovala Ajka Bachratá)

Papagáje nakúpili 100 predmetov za 5 eur. A kúpili z každého predmetu aspoň jeden kus. Aby sme nemuseli počítať s desatinnými číslami, premeníme si 5 eur na 500 centov. Za nich môžeme kúpiť najviac 500 ceruziek (za 1 cent), najviac 50 konzerv (za 10 centov) a najviac 10 otváracích (za 50 centov). Viac zo žiadneho druhu predmetu kúpiť nemôžeme, lebo by sme minuli viac ako 500 centov. Okrem toho si vieme povedať, že ceruziek musí byť menej ako 100 kusov, pretože sme kúpili len 100 predmetov.

Zamyslime sa teraz, koľko môže byť ceruziek. Vieme, že dokopy platíme sumu, ktorá končí nulou (500). A za konzervy a otváracie platíme tiež sumu končiacu nulou (10, 50). Takže potrebujeme toľko ceruziek, aby sme aj za ne platili nejaký násobok desiatich. Keby ich počet nebol násobok desiatich, ale napríklad 23, tak keby sme počítali cenu za všetky predmety, tiež by končila 3. Ale mi tam potrebujeme aby končila 0. Takže **ceruziek môže byť 10, 20, 30, ..., 80 alebo 90.**

Teraz už len treba vyskúšať, ktoré z týchto možností vyhovujú. Budeme to robiť tak, že si zoberieme presný počet ceruziek a zvyšné predmety budeme deliť medzi konzervy a otváracie tak, aby nám vyšla správna cena. Ak je 90 ceruziek za 1 cent, ostáva nám 10 predmetov a 410 centov. 1 konzerva a 1 otvárací stoja spolu 60, ostáva nám 8 predmetov a 350 centov. Za 8 otváracích je 400 centov (veľa), za 7 otváracích a jednu konzervu je 360 centov (veľa), za 6 otváracích a 2 konzervy je 310 centov. To už je málo a uberaním otváracích a pridávaním konzerv sa to bude už len znižovať. Takže nemohli mať 90 ceruziek.

Takýmto spôsobom skúsime ďalej jednotlivé počty ceruziek. Pre 80 a 70 ceruziek to opäť nevyjde. Pre 60 ceruziek, to vyzerá takto: Ostalo nám 40 predmetov a 440 centov. Za 9 otváracích (keby sme ich kúpili viac, tak hneď prekročíme cenu) a 31 konzerv zaplatíme spolu 760 centov (veľa), 8 otváracích a 32 konzerv stojí spolu 720 centov (veľa), 7 otváracích a 33 konzerv stojí spolu 680 centov (veľa), a tak ďalej.

Dva otváracie a 38 konzerv stojí spolu 480 centov (veľa) a 1 otvárací a 39 konzerv stojí spolu 440 centov. A presne toľko nám zostalo po zaplatení 60 ceruziek. Takže **60 ceruziek, 1 otvárací a 39 konzerv, vyhovuje zadaniu.**

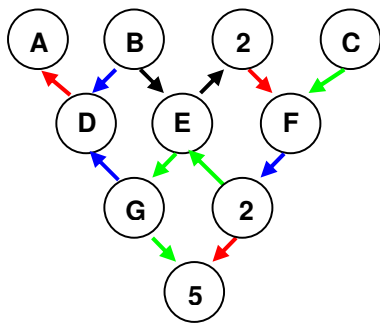
No ešte sme neskončili, pretože ak by sme našli ďalšie riešenie, tak by sa papagáje mohli pomýliť a vziať si cudzí nákup. Preto nám treba vyskúšať aj ostatné možné počty ceruziek (50, 40, 30, 20 a 10). Ani pre jedno to podobne ako pri 90 nevyjde, ale keby sme ich nevyskúšali, nemôžeme hovoriť, že sme nenašli jediné riešenie.

Úloha 2 (opravoval Peťo Czimmerman)

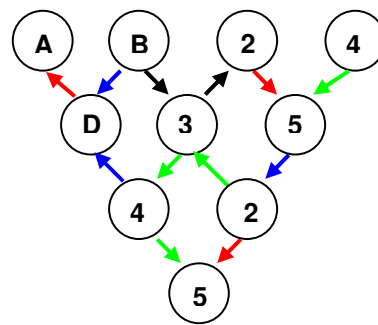
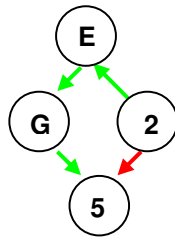
Keďže uteráky sú obdĺžnikové alebo štvorcové, tak hneď vieme určiť, ktorý uterák bol položený na kopy posledný (nie je prekrytý iným uterákom). Ak ho zoberieme z kopy, vidíme, že opäť tam je len jeden neprekrytý uterák, ten bol položený na kopy predposledný. Ak ho zoberieme z kopy, opäť tam bude len jeden neprekrytý. Toto sa opakuje zakaždým, keď zoberieme neprekrytý uterák, vždy tam bude len jeden neprekrytý. Takže poradie uterákov, v akom boli ukladané na kopy je jednoznačné a úloha má iba jedno riešenie.

Úloha 3 (opravovali Kika Kovalčíková a Kaja Janíková)

Označme si najskôr všetky neznáme hniezda písmenkami tak, ako je to na obrázku č. 1.



Obrázok č. 1



Obrázok č. 2

Obrázok č. 3

Ako prvé si všimnime spodné 4 hniezda, kde už dve počty vajíčok poznáme (obrázok č. 2). Keďže z hniezda s dvomi vajíčkami ide červená šípka do hniezda s piatimi vajíčkami, tak táto šípka musí mať hodnotu **+3**, lebo $2 + \text{červená} = 5$, a teda $5 - 2 = 3$. A keďže medzi tými dvomi hniezdami idú tri zelené šípky (cez hniezda E a G), tak zelená šípka musí mať hodnotu **+1**, lebo $2 + \text{zelená} + \text{zelená} + \text{zelená} = 5$, a teda $(5 - 2) / 3 = 1$. Pomocou červenej a zelenej šípky môžeme v pôvodnom obrázku doplniť počty vajíčok v hniezdach E, G, F, C nasledovne:

$$E = 2 + \text{zelená} = 2 + 1 = 3$$

$$G = E + \text{zelená} = 3 + 1 = 4$$

$$F = 2 + \text{červená} = 2 + 3 = 5$$

$$C = F - \text{zelená} = 5 - 1 = 4 \text{ (v tomto prípade musíme odpočítať hodnotu zelenej šípky, pretože ideme v proti smere tejto šípky).}$$

Po doplnení nám vyjde to, čo je na obrázku č. 3. Keďže už poznáme hodnotu hniezda F, tak môžeme určiť hodnotu modrej šípky. Tá ide od tohto hniezda do hniezda s dvomi vajíčkami, takže musí mať hodnotu **-3**, lebo $F + \text{modrá} = 2$, a teda $\text{modrá} = 2 - 5 = -3$. Pomocou modrej šípky môžeme ďalej dopočítať aj hodnoty v hniezdach B a D nasledovne:

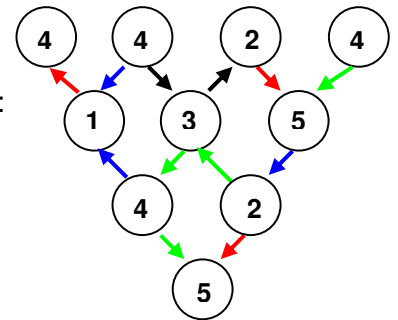
$$D = G + \text{modrá} = 4 + (-3) = 1$$

$$B = D - \text{modrá} = 1 - (-3) = 4 \text{ (ideme v proti smere šípky, takže odpočítavame).}$$

Z hniezda D ide červená šípka do hniezda A, takže v hniezde A musí byť vajíčok:

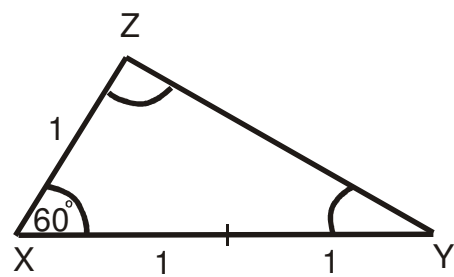
$$D + \text{červená} = 1 + 3 = 4.$$

Doplnené počty vajíčok všetkých hniezd potom budú vyzerat' takto:



Na záver ešte môžeme dopočítať aj hodnotu čiernej šípky, ktorú sme doteraz nevyužili. Vidno, že táto hodnota musí byť **-1**, lebo $4 + \text{čierna} = 3$, a teda $\text{čierna} = 3 - 4 = -1$.

Úloha 4 (opravoval Hynek Bachratý)



Najskôr si pripomeňme, o čo v príklade išlo. Opice nám dali pravidlá, ktoré musí spĺňať nakreslený trojuholník. Z trojuholníkov, ktoré pravidlám vyhovujú, máme narysovať ten, ktorý má súčet dvoch neznámych uhlov čo najväčší a máme zistiť, koľko ten súčet môže byť. Správna odpoveď preto musela obsahovať dve veci. Za prvé, podľa pravidiel sa dá nakresliť len jeden trojuholník, teda pravidlami je určený jednoznačne. Preto aj jeho dva neznáme uhly a aj ich súčet je vždy rovnaký (a teda aj najväčší). A za druhé, súčet týchto uhlov musí byť 120° .

Prvé tvrdenie vyplýva zo spôsobu, ako sa trojuholník rysuje. Najskôr spravíme stranu s dĺžkou 2 decimetre. Potom z jeho koncového bodu narysujeme uhol 60° a na druhé rameno nanesieme dĺžku 1 decimeter. Tým sme splnili všetky pravidlá. Na dokreslenie trojuholníka ale už treba len spojiť dva koncové body Z a Y vzdialené 1 dm a 2 dm od uhla. To sa ale dá len jediným spôsobom. **Nakreslené trojuholníky preto vždy budú rovnaké**, iba ak inak posunuté alebo otočené. Na určenie súčtu uhlov pri vrcholoch Z a Y stačí vedieť, že súčet všetkých troch uhlov trojuholníka je vždy 180° . (To ľahko uvidíme, ak si napríklad cez vrchol Z urobíme rovnobežku so spodnou stranou trojuholníka.) A keďže jeden uhol trojuholníka je 60° , **zvyšné dva musia byť spolu 120°** . Pokiaľ chceme zistiť aký veľký je každý z nich, jedna možnosť je odmerať ich veľkosť. Pri meraní sa ale môžeme pomýliť. Druhá možnosť je aj jednotlivé uhly vypočítať. Ak si spojíme

vrchol Z so stredom strany XY, trojuholník sa rozdelí na jeden rovnostranný a jeden rovnoramenný. **Pomocou ich vlastností sa dá presne dopočítat, že pri vrchole Z bude uhol 90° a vrchole Y uhol 30° .**