SEZAM, školský rok 2017/18, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Sára a Arthur sa s vami lúčia, ale len na veľmi krátku chvíľu. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Švp Šípková v Terchovej, ktoré sa bude konať v termíne od 15. do 18. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, prečítajte si ešte tieto vzorové riešenia. Určite vám pomôžu aj pri riešení úloh letnej časti súťaže
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

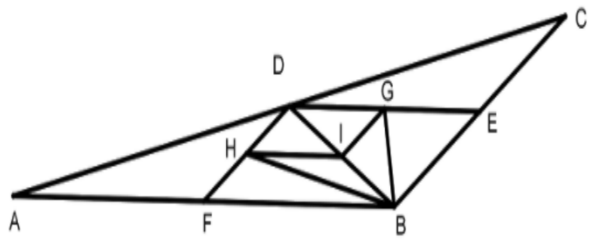
Príklad č. 1 *(opravoval Mojo Majdiš)*

K tomuto príkladu sa dalo pristupovať mnohými spôsobmi. Preto nie je prekvapivé, že od vás prišli naozaj rôznorodé riešenia. Ukážeme si jedno z nich.

Zamyslime sa, čo sa stane, keď nájdeme 6 po sebe idúcich hmotností, ktoré vieme vyskladať. Potom ku každej z týchto stavieb vieme pridať 6-kilový dielik a získame nasledujúcich 6 hmotností. K tým vieme opäť pridať 6-kilový dielik a získať ďalšie hmotnosti, a tak ďalej získavať všetky väčšie hmotnosti. Teraz nám teda stačí nájsť 6 po sebe idúcich kociek, ktoré zložiť ide. A každý si už sám ľahko overí, že pomocou (závaží 6,9 a 20) 43 kilovú stavbu zložiť nejde a všetky 44 až 49 kilové stavby zložiť ide.

Najmenšia váha stavby, ktorá sa dá postaviť a od ktorej vieme postaviť aj všetky ťažšie stavby, je 44 kilogramov.

Príklad č. 2 *(opravovala Baša Marečáková)*



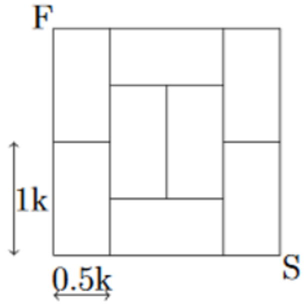
Zo zadania vieme, že HBGI má obsah 7 cm^2. Skúsme sa teda pozrieť na to, čo vieme zistiť o ostatných častiach trojuholníka ABC. Obsah trojuholníka vieme určiť ako polovicu súčinu dĺžky jednej jeho strany a výšky na túto stranu. Pozrime sa na trojuholníky ABD a CBD. Keďže bod D je v strede strany AC, tak vieme, že AD a CD majú rovnakú dĺžku. Výška na túto stranu je pre trojuholníky ABD a CBD rovnaká (dokonca spoločná), pretože bod B je rovnako vzdialený od strany AC. To znamená, že ABD a CBD majú rovnaký obsah. Rovnaké pozorovanie môžeme spraviť pre AFD a BFD, BED a CED a nakoniec aj pre dvojice BHI a DHI, a takisto BGI a DGI.

Keďže súčet obsahov BHI a BGI je 7 cm^2, tak obsah BGDH musí byť 14 cm^2. O ďalšiu úroveň vyššie máme štvoruholník FBED, ktorý bude mať obsah 28 cm^2. ***A nakoniec sa dostávame ku trojuholníku ABC, ktorý bude mať obsah 56 cm^2.***

<u>Poznámka k riešeniu:</u>

Väčšina z vás na začiatku riešenia povedala, že úsečka BI rozdeľuje útvar na dve časti s rovnakým obsahom. Avšak v riešení ste nepovedali, či to platí vždy. Skúste si premyslieť, čo by sa stalo, ak by to neboli rovnaké časti. Mohli by mať trojuholníky ABD a CBD rovnaký obsah?

Príklad č. 3 *(opravovala Kaťa Jasenčáková)*

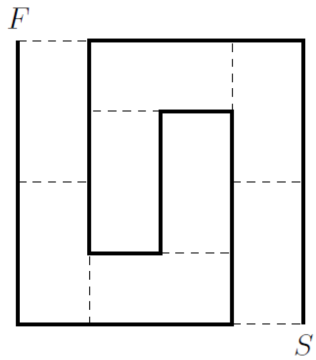


Ak sčítame dĺžky všetkých ulíc v meste, dostávame 16 kilometrov. Teda súčet dĺžky najdlhšej cesty a dĺžky ulíc, ktoré v najdlhšej ceste nie sú je presne 16 kilometrov. Uvedomme si, že nájsť najdlhšiu cestu znamená, že súčet dĺžok ulíc, ktorými Arthur neprešiel je najmenší možný. Úlohu budeme riešiť tak, že nájdeme tento najmenší súčet dĺžok neprejdených ulíc.

Arthur nesmie prejsť po žiadnej ulici ani križovatke dvakrát. To znamená, že ak pôjde nejakou križovatkou, prejde dvomi rôznymi ulicami. V meste je 14 križovatiek s tromi ulicami. To znamená, že ak takou križovatkou pôjdeme, jedna ulica ostane určite neprejdená. Keďže v bode S cestu začíname a v bode F končíme, použijeme len jednu ulicu začínajúcu (končiacu) v tomto bode. To je spolu 16 križovatiek, kde aspoň jednou ulicou nepôjdeme. V meste sú len ulice dlhé 1 km alebo 0,5 km. Aký najmenší súčet dĺžok neprejdených ulíc by sme mohli dostať? Zistili sme, že je 16 križovatiek, kde aspoň jednou ulicou nemôžeme ísť. Každá nepoužitá ulica bude končiť v dvoch križovatkách, takže nepoužitých ulíc musí byť aspoň 8. Ak nájdeme takých 8 ulíc dĺžky 0,5 km, ktoré budú končiť vo všetkých 16 križovatkách, tak dostaneme určite najdlhšiu cestu. Uvedomme si, že toto sa nám nemusí nutne podariť. V tomto meste však také ulice existujú. Na obrázku sú vyznačené prerušovanou čiarou. Súčet dĺžok nepoužitých ulíc je $8 \cdot 0{,}5 = 4$ km, teda ***najdlhšia cesta má*** $16 - 4 =$ ***12 kilometrov***.

Poznámka k riešeniu:

Vo všeobecnosti nám nestačí uvažovať o najmenšom počte neprejdených ulíc. Ak by sme mali mesto, kde by to bolo 8 ulíc, z ktorých 5 by malo 0,5 km a 3 by mali 1 km, súčet ich dĺžok by bol 5,5 km. Mohlo by sa však stať, že by sme nejakú križovatku nepoužili a bolo by 10 neprejdených ulíc, no všetky dĺžky 0,5 km. Teda súčet ich dĺžok by bol 5 km a teda najdlhšia cesta by neprechádzala všetkými križovatkami. V tejto úlohe sme mali šťastie, že sme vedeli nájsť 8 ulíc dlhých 0,5 km medzi takými 16 križovatkami, kde aspoň jednou ulicou nemôžeme ísť.



Príklad č. 4 *(opravovala Kika Kovalčíková)*

Poďme sa najprv pozrieť na to, ako vyzerajú dve čísla, ktorých rozdiel je násobkom 100. Sú to napríklad dvojice čísel 512 a 312, alebo 268 a 368, alebo aj 841 a 141. Musí platiť, že obidve čísla musia mať na mieste desiatok a na mieste jednotiek rovnaké číslice – teda musia mať rovnakú „dvojcifernú koncovku“. Na to, aby Sára vyhrala, musí vybrať 101 čísel, spomedzi ktorých všetky majú rôzne dvojciferné koncovky. Koľko takýchto koncoviek existuje? Ak ich zoradíme od najmenšej po najväčšiu, dostaneme 00, 01, 02, ...98, 99. Je ich presne sto. To znamená, že ak by Sára vyberala iba 100 čísel, ešte by sa jej mohlo podariť vybrať ich tak, aby všetky mali rôznu koncovku. To by znamenalo, že rozdiel medzi hociktorými dvoma číslami nie je násobok 100. Ak však vyberá sto prvé číslo, už nemá žiadnu nepoužitú koncovku. Takže nech vyberie hocijako, koncovka nového čísla už bude raz použitá, a teda v jej skupine čísel budú aspoň dve čísla s rovnakou koncovkou, ktorých rozdiel je násobkom 100.