SEZAM, školský rok 2017/18, vzorové riešenia 1. zimnej série

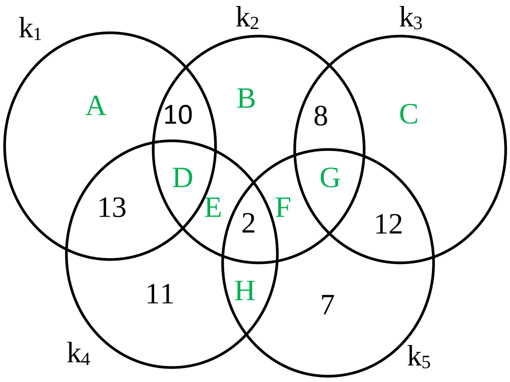
Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Sára a Arthur sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami, na ktoré natrafia pri svojom putovaní vesmírom. Popri počítaní nových úloh si môžete precvičiť vaše matematické bunky pri čítaní týchto vzorových riešení.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Skontrolujte si, či máte v poradí všetky svoje údaje správne. A nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovali Ondro Belan a Adam Kňaze*)

Najskôr zistíme, aký súčet čísel treba doplniť do jednotlivých vesmírnych kolies tak, aby bol súčet všetkých čísel v kolese 39. Taktiež si zistíme, aké čísla ešte nie sú doplnené. Z toho vieme určiť, aké čísla s potrebným súčtom sa dajú dosadiť a pokúsime sa ich doplniť na správne miesta. Pričom čísla môžeme doplniť iba do voľných miest a do každého voľného miesta môžeme vložiť iba jedno číslo.

Voľné miesta označíme písmenami od A po H a kolesá od k_1 po k_5, aby sa nám s nimi lepšie pracovalo. Do k_1 treba doplniť súčet 16, do k_2 súčet 19, do k_3 súčet 19, do k_4 súčet 13 a do k_5 súčet 18. Nedoplnené čísla sú: 1, 3, 4, 5, 6, 9, 14 a 15.

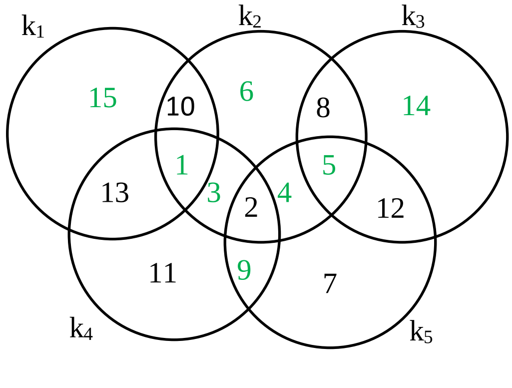


Do kolesa k_1 môžeme doplniť iba 1 a 15, lebo medzi nepoužitými číslami nie je iná dvojica so súčtom 16. Číslo 15 nemôže byť v D, lebo inak by sme v kolese k_4 dostali spolu s už doplnenými číslami súčet väčší ako 39. Preto je nutne v A číslo 15 a v D číslo 1. V k_2 môžu byť na voľných miestach iba čísla 1, 3, 4, 5 alebo 6, lebo ak by sme použili iné nedoplnené číslo, tak by bol súčet v k_2 priveľký. Zatiaľ však nevieme zistiť, kde je aké číslo.

V k_3 musia byť čísla 14 a 5, lebo sú to jediné dve ešte nepoužité čísla, ktorých súčet je 19. Číslo 14 nemôže byť v G, lebo potom by vo F a H mohli byť iba 1 a 3, pretože sú to jediné dve rôzne čísla dávajúce súčet 4. Ale číslo 1 je už použité v D, takže táto kombinácia nie je možná. Preto musí byť v G číslo 5 a v C číslo 14. V k_4 môže byť buď trojica 1, 3, 9 alebo trojica 3, 6, 4. No v D je už číslo 1, takže nutne musí nastať prvá možnosť, a teda do k_4 musíme doplniť 3 a 9. Číslo 9 nemôže byť v k_2, takže musí byť v H a v E musí byť číslo 3.

Do k_5 sme už doplnili čísla 9 a 5, takže teraz nám chýba iba 4 do súčtu 18. Takže číslo 4 bude v F. Posledné číslo dosadíme na posledné voľné miesto, čiže do B.

Dostali sme nasledovné jediné možné riešenie:



Príklad č. 2 *(opravovali Erika a Peťo Novotní)*

Najlepšie je, ak si na začiatku aspoň 50-krát zahráme hru. Aj my sme sa zahrali a dopadlo to takto:

1 – 15-krát
2 – 11-krát
3 – 5-krát
4 – 7-krát
5 – 3-krát
6 – 3-krát
7 – 3-krát
10 – 1-krát
12 – 2-krát

Ako ste viacerí uviedli, nevieme naisto, aké číslo sa najčastejšie nachádza na prastarom zvitku. V našom pokuse (a aj vo väčšine Vašich) vyšla najčastejšie jednotka, ale niektorým z Vás pri 50 hrách vyšla najčastejšie dvojka či dokonca trojka. A nemôžeme vylúčiť ani iné možnosti (aj keď ich šanca je menšia), a to ani v prípade že hráme viac ako 50 hier. Správna odpoveď teda je, že s istotou sa najčastejšie číslo na zvitku určiť nedá.

Ale vieme vypočítať aspoň to, ako často sa ktoré číslo na zvitku nachádza „priemerne" – teda vieme vypočítať pre jednu hru, aká je pravdepodobnosť, že skončí po 1 hode kockou, po 2 hodoch, atď.

Hádžeme dvoma kockami a na každej z nich máme šesť čísel. To znamená, že máme 36 možností, čo nám môže padnúť. Z týchto 36 možností je 9 takých, kde sú dve párne čísla. To je 1/4. Zvyšných možností sú 3/4 (1/2 párne a nepárne; 1/4 nepárne a nepárne). Z toho vyplýva, že máme 25%-nú šancu, že nám padnú dve párne a 75%-nú šancu, že nám padne niečo iné.

Predstavme si, že máme 100 hier (100%). Podľa pravdepodobnosti z týchto 100 hier priemerne 25 skončí už po prvom hode (25%) a 75 pokračuje ďalšími hodmi (75%). Tie hry, ktoré skončili, necháme tak a ideme hádzať druhý krát v ostatných hrách (ktorých je priemerne 75). Opäť nám vyjde 25% hier, ktoré skončia, ale tentokrát to bude už len priemerne 18,75 hier (18,75%), pretože počítame 25% len zo 75%. Ďalšími hodmi pokračuje priemerne len 56,25 hier (56,25%). Takto môžeme pokračovať ešte veľmi dlho a ako môžeme vidieť, pravdepodobnosť sa nám bude postupne znižovať (pretože počítame 25% čím ďalej z menšieho základu). ***Preto je najpravdepodobnejšie, že na zvitku bude najčastejšie napísané číslo 1.***

Príklad č. 3 *(opravovala Iva Jančigová)*

Najprv porátajme, koľko je všetkých možných kódov, vrátane tých, čo ležia na priamke, ale takých, v ktorých sa už nemôžu opakovať číslice (tie by nám potom určite netvorili trojuholník a museli by sme ich odčítať). Prvá číslica môže byť hociktorá z desiatich, druhá hociktorá zo zvyšných deviatich a tretia hociktorá zo zvyšných ôsmych. Teda všetkých možností je 10 · 9 · 8 = 720.

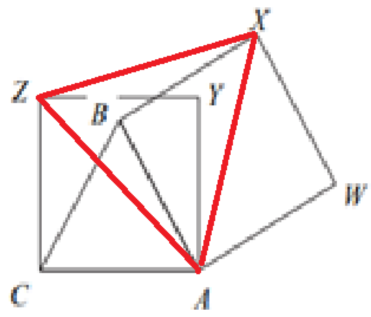
Teraz sa pozrime, ktoré trojice číslic ležia na spoločnej priamke – tie nevytvoria trojuholník. V riadkoch sú to 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9, na diagonálach 1-5-9, 3-5-7 a v stĺpcoch 1-4-7, 2-5-8, 2-8-0, 5-8-0, 2-5-0, 3-6-9. To je spolu 11 trojíc. Každá z nich predstavuje 6 rôznych kódov, napr.: 1-2-3 dá kódy 123, 132, 213, 231, 312, 321. To, že ich je 6, sa dá zistiť aj rovnako, ako sme počítali počet všetkých kódov na začiatku: na prvé miesto dám jednu číslicu z troch, na druhé jednu zo zostávajúcich dvoch a na posledné tú, čo mi ostala, čiže počet možností je 3 · 2 · 1 = 6.

Počet všetkých trojuholníkových kódov je potom 720 - 6 · 11 = 654.

Poznámka k riešeniu:

Niektorí z vás našli rôzne systematické alebo menej systematické spôsoby, ako tieto kódy vypísať alebo nakresliť. Okrem toho, že je to veľmi prácne, pri takomto vypisovaní je veľmi ľahké na niektorú možnosť zabudnúť. Určite to pri malých počtoch pomôže na preskúmanie, ako sa tie možnosti správajú – napríklad to, ako som ja hore napísala, že trojica číslic dá 6 kódov. Avšak pri veľkom počte možností sa treba zamyslieť nad tým, ako by sa dali spočítať aj bez toho, že by sme ich museli vypísať všetky.

Príklad č. 4 *(opravoval Lenka a Miro Hudecovci)*



Strany AB a AC sú stranami rovnostranného trojuholníka a zároveň stranami štvorcov AYZC a AWXB, z čoho vyplýva, že tieto štvorce sú zhodné. Preto môžeme povedať, že |AZ| = |AX| (oboje sú uhlopriečkami štvorcov, o ktorých vieme, že sú zhodné) a teda trojuholník AXZ je minimálne rovnoramenný. Ak ukážeme, že tieto jeho dve strany zvierajú uhol 60°, tak bude dokonca rovnostranný. V takom prípade budú totiž aj uhly pri základni tohto „rovnoramenného" trojuholníka 60°.

Ukážeme si dva spôsoby, ako dokázať, že |∠ ZAX| = 60°:

Predstavme si situáciu, že máme naše dva štvorce nakreslené tak, že sa úplne prekrývajú – bod A majú spoločný, B a C sú na jednom mieste, Z a X sú a jednom mieste a W a Y sú tiež na jednom mieste. Následne otáčajme štvorec AWXB v smere hodinových ručičiek tak, že bod A sa nehýbe - ako keby bol prišpendlený a to dovtedy, kým nedostaneme situáciu, aká je znázornená a popísaná v zadaní. Keďže veľkosť uhla CAB je 60° a štvorec sme otáčali ako celok, tak každý bod štvorca sa musel otočiť o rovnakých 60°. Tým pádom ale aj uhlopriečka AX sa otočila o 60° a teda veľkosť uhla ZAX je 60°. Z toho vyplýva, že trojuholník AXZ je naozaj rovnostranný.

Trocha klasickejšie riešenie je zistiť veľkosť uhla ZAX „cez číselká". Vieme, že trojuholník ABC je rovnostranný a teda všetky jeho vnútorné uhly sú 60°. Preto aj |∠ CAB| = 60°. (1)

Útvary CAYZ a AWXB sú štvorce a o štvorci vieme, že jeho uhlopriečka delí uhol pri vrchole, ktorým prechádza, na polovice. Na základe toho vieme povedať, že |∠ CAZ| = |∠ BAX| = 45°. (2)

Z obrázka vidíme, že |∠ ZAX| = |∠ ZAB| + |∠ BAX|. (3)

|∠ BAX| poznáme, potrebujeme zistiť ešte |∠ ZAB|. Úsečka ZA je sečnica uhla |∠ ZAB| a vidíme, že |∠ ZAB| = |∠ CAB| - |∠ CAZ| = 60° - 45° = 15°. (4).

Keď dosadíme výsledok (2) a (4) do (3), dostaneme

|∠ ZAX| = |∠ ZAB| + |∠ BAX| = 15° + 45° = 60°.

Týmto sme ukázali, že strana ZA a AX zvierajú uhol 60° a teda trojuholník ZAX je rovnostranný.

Poznámka k riešeniu:

Viacerí riešitelia sa snažili ukázať, že trojuholník AXZ je rovnostranný pomocou rysovania a merania dĺžok úsečiek. Rysovanie a meranie však nie sú tým úplne presným dôkazom o tom, že nejaká úsečka či uhol majú nameranú veľkosť. Pri rysovaní a meraní sa dopúšťame rôznych nepresností, samotné pravítko či uhlomer nie sú dokonale presné, ceruzka, ktorú používame, má tiež nejakú hrúbku. Naviac aj rozdiel v dĺžke úsečiek o 0,01 mm znamená, že tieto úsečky nie sú rovnako dlhé. Takýto malý rozdiel však nevieme bežne dostupnými a používanými pomôckami namerať a tým pádom určiť, či sú úsečky rovnako dlhé alebo nie. Preto je dobré používať rysovanie a meranie len na odhadnutie či kontrolu výsledku riešenia, ktorý ale musíme vždy odôvodniť logickými argumentmi.