JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Ian, Brianna a Jean sa s vami do jari lúčia. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Švp Šípková v Terchovej, ktoré sa bude konať v termíne od 16. do 19. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Baška Marečáková)

Najčastejšie ste pri riešení úlohy vypísali všetky možnosti alebo našli zlepšovák. Vždy, keď sa rozhodnete vypisovať možnosti, dajte si pozor, aby ste na žiadnu nezabudli – vytvorte si systém. V riešeniach nám popíšte aj tento systém.

a. 2 x x x 5

b. 2 x x 5 y

c. 2 x 5 y y

d. 2 5 y y y

Poďme úlohu vyriešiť pomocou nejakých zlepšovákov. Vieme, že na prvom mieste môže byť len veža veľkosti 2, inak by Ian videl aj inú vežu. Veže s veľkosťami 1 až 5 môžu byť za vežou s veľkosťou 5, aby ich Ian nevidel. Veža veľkosti 5 môže mať štyri prípady uloženia. Na obrázku sa Ian pozerá zľava, kde je písmenko prípadu (a. – d.) a veže označujeme číslom, ak vieme veľkosť. Veže, ktorých veľkosť nevieme označujeme **x**, ak sa nachádzajú medzi vežami 2 a 5 a **y**, ak sú za vežou veľkosti 5.

V prípade c. máme len jedno **x**, ktoré môže mať hodnotu 1 alebo 2. Ak nájdeme vyhovujúcu dvojicu **y y**, tak ju započítame dvakrát – jedenkrát, ak **x** bude 1 a jedenkrát, ak **x** bude 2. Vyhovujúca dvojica **y y**, je napríklad **1 5**. Ako však zrátame všetky? Na mieste prvého **y** môžu byť čísla 1 až 5. Ak by tam bola 1, tak na mieste druhého **y** môžu byť čísla 1 až 5. Teda pre každé prvé **y** máme 5 možností druhého **y**. Spolu dostávame 5 · 5 možností. Celkovo pre prípad c. máme teda 2 · 5 · 5 = 50 možností.

Podobne vyriešime aj ostatné prípady. Pre a. to vyzerá nasledovne: 2 · 2 · 2 = 8 možností. Pre prípad b. dostávame 2 · 2 · 5 = 20 možností. V prípade c. sme už vyššie vypočítali 50 možností. A d. bude mať najviac, a síce 5 · 5 · 5 = 125 možností.
Možností ako mohli stáť vežičky v rade za sebou je 8 + 20 + 50 +125 = 203.

Príklad č. 2 (opravoval Kajo Hrubják)

Poďme nájsť nejaké číslo, ktoré by mohlo byť na sťažni. Predstavme si číslo, ktoré je deliteľné všetkými číslami od 2 do 31. Napríklad najmenší spoločný násobok týchto čísel (rozpísaný v rozklade na prvočísla) vyzerá nasledovne:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 31$$

Alebo po usporiadaní:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$$

Čísla, ktoré sa dajú získať vynásobením týchto prvočísel budú deliteľmi tohto čísla. Na to aby nám delitele ubudli musíme odobrať nejaké prvočísla z tohto rozkladu.

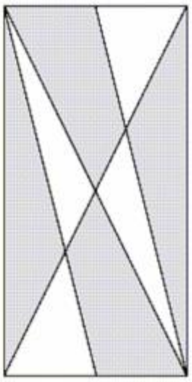
Ak by sme ubrali jedenkrát číslo 2, deliteľom by prestalo byť číslo 16. Ak by sme ubrali jedenkrát číslo 3, deliteľom by prestalo byť číslo 27. Ak by sme ubrali jedenkrát číslo 5, deliteľom by prestalo byť číslo 25. Ak by sme ubrali číslo 7, deliteľmi by prestali byť čísla 7, 14, 21, 28 - (ubudlo by veľa deliteľov). Ak by sme ubrali číslo 11, deliteľmi by prestali byť čísla 11, 22 - (ubudlo by veľa deliteľov). Ak by sme ubrali číslo 13, deliteľmi by prestali byť číslo 13, 26 - (ubudlo by veľa deliteľov). Ak by sme ubrali jedno z prvočísel 17, 23, 29, 31, prestalo by byť deliteľom iba dané prvočíslo.

Je vidieť, že jediná dvojica čísel idúcich za sebou z čísel 16, 17, 23, 25, 27, 29, 31 je dvojica čísel 16 a 17. Po odobratí jednej 2 a 17 z rozkladu prvočísel, by prestali byť 16 a 17 deliteľmi nášho veľkého prirodzeného čísla, pričom ostatné by deliteľmi ostali. Takýmto veľkým číslo by mohlo byť napríklad číslo:

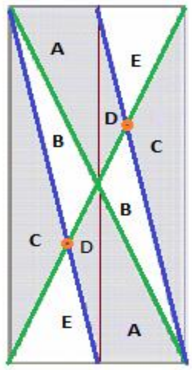
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$$

Zo zadania vieme zistiť, že klamali 15. a 16. námorník.

Príklad č. 3 (opravovala Denisa Múthová)



Našou úlohou je zistiť koľko santalového dreva je potreba na výrobu dverí chrámu. Vieme, že dvere majú tvar obdĺžnika (viď. horný ľavý obrázok) a plochu $6m^2$. Sú rozdelené uhlopriečkami a ďalšími priečkami, spájajúcimi vrcholy so stredmi protiľahlých strán. Santalové drevo sú tmavé časti a sklenené časti sú tie svetlé. Akú plochu majú dokopy tmavé časti?



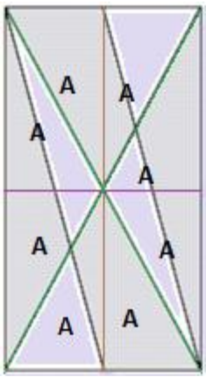
Rozdeľme si dvere zvislou čiarou, začínajúcou v strede kratšej strany a vedúcou stredom. Táto čiara nám rozdelí dvere na dva rovnaké obdĺžniky. Oba majú svoju uhlopriečku, ktorá každý z nich rozdeľuje na dva rovnaké trojuholníky. Označme si všetky vzniknuté trojuholníky (viď. pravý obrázok). Vďaka uhlopriečkam platia rovnosti obsahov trojuholníkov A + B + D = C + E. Tiež uhlopriečky dverí vytvárajú dva zhodné obsahy trojuholníkov, a to B + C = A + D + E. Keď si rovnosti sčítame, dostaneme

A + 2B + C + D = A + C + D + 2E

a po úprave 2B = 2E a teda trojuholníky B a E majú rovnaký obsah. Potom prvá rovnica sa dá zapísať ako

A + B + D = A + E + D = C + E,

t.j. keď vyberieme E z každej strany dostaneme A + D = C.



Ďalej si poďme niečo povedať o trojuholníkov C a D. Tieto trojuholníky sú podobné, pretože majú spoločný uhol a pomery ich strán sú 2:1. To znamená, že aj výška trojuholníka C bude dvakrát väčšia ako výška trojuholníka D a teda obsah C bude dohromady štyrikrát viac ako obsah D. Teraz si vieme A + D = C zapísať ako A + (1/4)C = C teda A = (3/4)C. Aký je obsah trojuholníka A? Do pôvodného obrázku 1 si vieme dokresliť čiaru, ktorá začína v strede dlhšej strany a ide stredom a dostaneme 8 zhodných trojuholníkov, ktoré majú rovnaký tvar a teda aj obsah ako trojuholník A (viď. dolný ľavý obrázok). Obsah A = 6/8 = $0{,}75m^2$. Potom C = 0,75 · (4/3) = $1m^2$, D = C – A = $0{,}25m^2$. Súčet sklenených častí je 2B + 2E = 6 – 2A – 2C – 2D = 6 – 1,5 – 2 – 0,5 = 2 a teda B + E = 1 a teda B = E = $0{,}5m^2$.

Santalové drevo je tým pádom súčet 2A + 2C + 2D = 1,5 + 2 + 0,5 = 4m² .

Príklad č. 4 (opravovala Iva Jančigová)

Kto mohol povedať „Som červenovlasý severan.“ ?

- Červenovlasý severan (ČS) to mohol byť, lebo tí hovoria pravdu.
- Červenovlasý južan (ČJ) to tiež mohol byť, lebo tí klamú a veta uňho nie je pravdivá.
- Hnedovlasý južan (HJ) to povedať nemohol, lebo tí hovoria pravdu a toto by v jeho prípade pravda nebola.
- Hnedovlasý severan (HS) to mohol povedať, lebo tí klamú a veta uňho nie je pravdivá.

Takže máme tri možnosti: ČS, ČJ, HS. My síce jeho farbu vlasov nevieme, ale Brianna ho videla. Ak by videla hnedé vlasy, tak by jej bolo jasné, že z týchto možností to môže byť len HS. Keďže však pôvod obyvateľa nevedela jednoznačne určiť, ***musel to teda byť buď ČS alebo ČJ.***

Ešte dve poznámky k riešeniu:

1. *Na klamanie si treba naozaj dávať pozor! Stačí, aby niečo v tvrdení bolo klamstvo (napr. iba farba vlasov) a už to, čo povedal celé spolu, nemôže byť pravda. A tým pádom to musí byť klamstvo (lebo tretia možnosť neexistuje).*
2. *Ako niektorí geograficky podkutí Sezamáci správne poznamenali, Madagaskar je celý na južnej pologuli. Toto aj Brianna rýchlo zistila a potom rovnako ako vy zisťovala, či je obyvateľ zo severu alebo z juhu ostrova. ☺*