

JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU
SEZAM, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,

práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Ian, Brianna a Jean vám zo vzdialenej Srí Lanky ďakujú za všetky vaše riešenia. Teraz vás čaká tretia séria a posledná šanca zabojsovať o účasť na zimnom sústreďení. Predtým než sa pustíte do riešenia si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vyplňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Brianna tvrdí, že ak si bude Bonifác myslieť akékoľvek prirodzené číslo menšie ako 100, ciferný súčet súčiny jej čísla a Bonifácovho čísla bude 18. Musí to teda platiť aj keď bude Bonifácovo číslo 1. Vtedy je súčin rovný Brianninmu číslu. To je číslo menšie ako 100. Hľadáme preto čísla menšie ako 100, ktoré majú ciferný súčet 18. Jediné takéto číslo je 99. Teraz musíme zistiť, či naozaj vynásobením čísla 99 hocijakým číslom menším ako 100 dostaneme vždy číslo s ciferným súčinom 18.

Pozrime sa, ako vyzerajú násobky čísla 99:

$$99 \cdot 1 = 99$$

$$99 \cdot 2 = 198$$

$$99 \cdot 3 = 297$$

$$99 \cdot 4 = 396$$

...

$$99 \cdot 10 = 990$$

$$99 \cdot 11 = 1089$$

$$99 \cdot 12 = 1188$$

...

Medzi jednotlivými násobkami je vždy rozdiel 99. Čiže ku každému ďalšiemu násobku pripočítavame číslo 99. To je to isté, ako keby sme najprv pripočítali 100 a potom odčítali 1.

Keď je na mieste stoviek číslo menšie ako 9, tak toto číslo sa zväčší o 1 a číslo na mieste jednotiek sa zmenší o 1. Teda ciferný súčet sa nezmení. Keďže prvý ciferný súčet je 18, aj ostatné budú 18.

Keď je na mieste stoviek číslo 0, na mieste jednotiek bude číslo 9. Prečo je to tak? Vidíme, že to platí, keď vynásobíme čísla 99 a 11. Pri ďalšom násobku, teda pripočítaním čísla 99 sa číslo na mieste stoviek o 1 zväčší, no keďže je tam 9, zmení sa na 0 na mieste stoviek a na 1 na mieste tisícok. Ešte musíme odčítať 1. Na mieste jednotiek je 0, preto na mieste desiatok bude číslo o 1 menšie a na mieste jednotiek bude 9. Teda na mieste tisícok máme číslicu o 1 väčšiu, na mieste desiatok o 1 menšiu a číslice na mieste stoviek a jednotiek sa vymenili. Preto sa ciferný súčet nezmení. Zároveň platí, že súčet cifier na mieste stoviek a jednotiek je stále 9. Preto, keď budeme prechádzať cez vyššiu tisícúku, nastane tá istá situácia. Teda na mieste tisícok bude číslica o 1 väčšia, na mieste desiatok o 1 menšia a číslice na mieste stoviek a jednotiek sa vymenia. Preto ciferný súčet bude vždy 18.

Brianna si myslela číslo 99.

Príklad č. 2 (opravovala Kayči Čárska)

Niektorí z Vás zadanie pochopili tak, že hádzanie vo všetkých prípadoch končí po treťom kole a niektoré z lodí nevyplávajú. V zadaní je však dôležitá informácia, že „Lod' vyrazí okamžite, ak je v nej jeden kapitán a okrem neho minimálne jeden cestujúci.“ To znamená, že hádzanie pokračuje dovtedy, pokiaľ nebude v lodi 1 kapitán a aspoň 1 cestujúci.

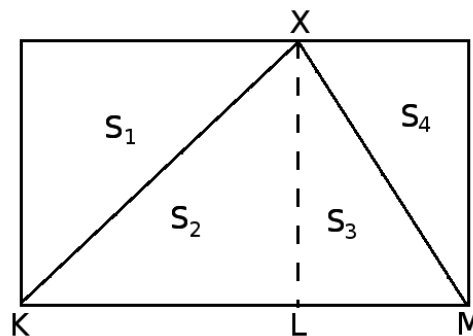
Keď si zahádzate kockou, už pri 20-30 hodoch zistíte, že najčastejšie sa v lodi povezie jeden kapitán a jeden cestujúci (samozrejme, môže sa stať kadečo, nikdy dopredu nevieme, aké čísla budú na kocke padať, no táto možnosť je najpravdepodobnejšia – vyskúšajte si to!). S narastajúcim počtom cestujúcich klesá počet lodí, ktoré ich vezú. (Lodí s 3 cestujúcimi bude menej, než lodí s 2 cestujúcimi, atď...). Niektorí z Vás dokonca porátili aj príslušné pravdepodobnosti.

Pozrime sa na to teraz z matematickej strany. Pri prvom hode do lode nastúpi buď kapitán alebo cestujúci. Ak nastúpi kapitán, čo je v polovici prípadov, je už jasné, že sa v lodi povezie maximálne 1 cestujúci (rozmyslite si prečo). Ak pri prvom hode nastúpi cestujúci, čo je v druhej polovici prípadov, pri druhom hode máme opäť dve možnosti – buď nastúpi kapitán a loď odpláva (presne $\frac{1}{4}$ prípadov) alebo nastúpia ďalší cestujúci a kockou sa hádže aj v treťom kole. Už teraz je jasné, že najčastejšie sa na lodi povezie 1 cestujúci – v našom ideálnom matematickom prípade je to v $\frac{3}{4}$ prípadov.

Zistili sme, že najčastejšie sa na lodi povezie 1 cestujúci.

Príklad č. 3 (opravovala Lenka Hudecová)

Aby sme zistili, ktoré kúsky chapati má Ian dať kráľovi, pozrime sa najskôr na trojuholník KMX, ktorý je v chapati tvorený časťami B, A a F. Úsečka XL rozdeľuje celý obdĺžnik na dva menšie obdĺžniky. Úsečka KX je uhlopriečka jedného z týchto nových obdĺžnikov a rozdeľuje ho na dve polovice. Z toho vyplýva, že $S_1 = S_2$. Z rovnakých dôvodov platí, že $S_4 = S_3$. Keď si tieto dve rovnosti správne spojíme, dostaneme, že $S_2 + S_3 = S_1 + S_4$. Trojuholník KMX tvorí teda polovicu obsahu celého obdĺžnika.



Keď sa vrátíme späť k pôvodnému obrázku zo zadania, tak vidíme, že trojuholník KMX je tvorený časťami B, A a F. Preto obsah $B + A + F$ je polovička z celej placky a tým pádom $B + A + F = C + D + E + G + H$. (rovnica číslo 1)

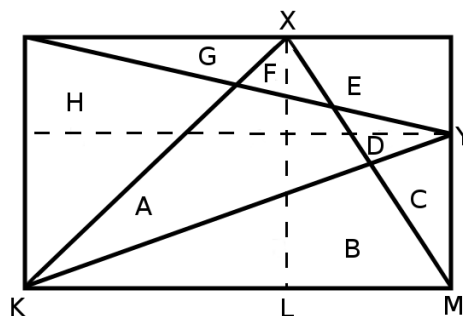
Keď si vezmeme trojuholníky tvorené kúskami $B + A + F$ a $H + A + D$, tak vieme, že oba tieto trojuholníky majú rovnaký obsah (polovica celej placky). Platí teda, že $B + A + F = H + A + D$. (rovnica číslo 2)

Teraz už stačí len rovnicu číslo 2 využiť v rovnici číslo 1 tak, že nahradíme ľavú stranu v rovnici číslo 1 pravou stranou rovnice číslo 2, keďže sa rovnajú. Dostaneme:

$$H + A + D = C + D + E + G + H \quad / - H - D$$

$$A = C + E + G$$

Ian má dať kráľovi kúsky C, E a G.



Príklad č. 4 (opravoval Miro Hudec)

Domorodec mohol byť severan alebo južan, červeno alebo hnedovlasý. Spravme si tabuľku, kde preskúmame všetky štyri možnosti. Pre každú z nich potom zistíme, či odpoveď NIE na prvú a druhú otázku by bola pravda alebo klamstvo. Na základe toho môžeme potom v poslednom stĺpci spraviť to isté pre tú jedinou odpoveď, ktorú nám dal.

Rodisko	Farba	Čestnosť	NIE na „Si H?“	NIE na „Si J“	„Ak by som na obe otázky odpovedal NIE, aspoň raz by som klamal.“
S	Č	P	Pravda	Pravda	Klamstvo
S	H	K	Klamstvo	Pravda	Pravda
J	Č	K	Pravda	Klamstvo	Pravda
J	H	P	Klamstvo	Klamstvo	Pravda

Teraz nám zostáva už len zistiť pre každý riadok, či tá jeho odpoveď (posledný stĺpec) je v súlade s jeho čestnosťou. Ak nie je, tak domorodec určite nemohol byť z príslušnej časti ostrova a s danou farbou vlasou. Jedine v poslednom riadku nemáme rozpor, takže odpoveď je:

Áno, vieme zistiť, akého domorodca sme stretli – je to hnedovlasý južan.