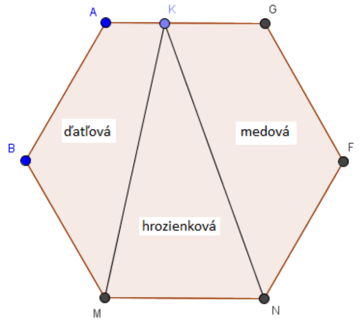
SEZAM, školský rok 2015/16, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Rudolfus, Naika, Ebonika a Horus vám z ďalekého Egypta ďakujú za všetky vaše riešenia. Teraz vás čaká tretia séria a posledná šanca zabojovať o účasť na zimnom (marcovom) sústredení. Predtým než sa pustíte do riešenia si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

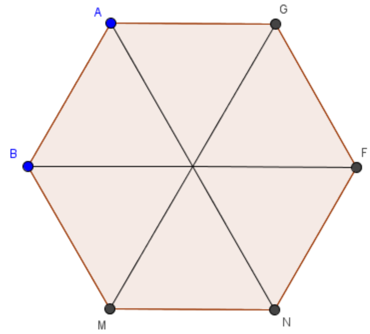
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 *(opravovala Ivka Hrivová)*

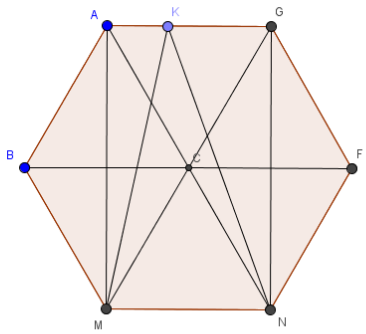


Pozrime sa na našu situáciu: máme tortu tvaru pravidelného 6-uholníka, rozdelenú na 3 časti (obr. vľavo). Chceme zistiť, akú časť z torty zaberá hrozienková poleva.

Aby sa nám s tortou lepšie pracovalo, rozdelíme si ju na menšie, rovnaké časti (obr. vpravo). Keďže torta je tvaru PRAVIDELNÉHO 6-uholníka, tak tieto trojuholníky sú všetky rovnaké a rovnostranné, teda každý má tri rovnako dlhé strany.

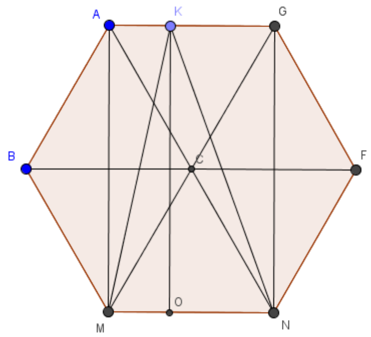


Teraz si do našej rozdelenej torty doplňme všetky údaje ktoré poznáme. Navyše si vytvoríme úsečky AM a GN, ktoré využijeme neskôr (druhý obr. vľavo)



Vidíme, že trojuholníky ABC, BMC, MNC, MFC, FGC a GCA sú všetky rovnaké a dokopy tvoria celú tortu. Preto povrch každého z nich je šestina povrchu torty.
Teraz si všimnime, že ak z trojuholníka ABC odsekneme pravú polovicu podľa naznačenej čiary a správne natočenú ju prilepíme na spodok zvyšku trojuholníka, tak dostaneme trojuholník ABM. Preto má trojuholník ABM rovnaký povrch ako ABC, čiže šestinu povrchu torty.
Podobne vieme z trojuholníka FGC vyrobiť trojuholník GNF, takže aj ten bude mať povrch rovný šestine povrchu celej torty. Obdĺžnik AMNG spoločne s trojuholníkmi ABM a FGN tvoria celú tortu, takže povrch obdĺžnika AMNG je rovný povrchu celej torty mínus povrchy trojuholníkov ABM a FGN. Od celku odrátame dve šestiny, takže povrch obdĺžnika AMNG je dve tretiny koláča.

Nakoniec skúsme zistiť, akou časťou obdĺžnika AMNG je hrozienková časť MNK. Rozrežme tento trojuholník kolmým rezom vedeným z vrcholu K smerom dole, až do bodu O. Ak sa dobre pozrieme na obrázok vpravo, tak uvidíme, že trojuholník KMO je presnou polovicou obdĺžnika AMOK (lebo ten sa skladá z dvoch rovnakých trojuholníkov MAK a MOK). A trojuholník KON je zas presnou polovicou obdĺžnika KONG. Preto keď zložíme KMO a KON dokopy, tak budú mať polovicu povrchu AMOK zloženého z KONG. Ináč povedané, hrozienkový povrch KMN je polovicou povrchu obdĺžnika AMNG. No a ten má povrch dve tretiny z povrchu celého koláča.

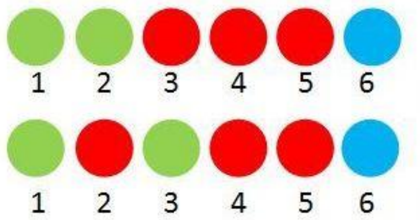


Obsah hrozienkovej časti je teda jedna tretina z povrchu celého koláča, nech je bod K kdekoľvek na hrane AG.

Príklad č. 2 (*opravovala Miška Santrová****)***

Najprv si rozoberme ofarbenia sediel.
Keď Horus vyberie nejaké štyri ťavy, aspoň jedna z nich má červené sedlo. V stajni ostávajú dve ťavy, ktoré môžu mať tiež červené sedlo. Aby však aj z vybraných štyroch tiav mala aspoň jedna červené sedlo, musia mať červené sedlo aspoň tri ťavy.
Keď Horus vyberie hociktorých päť tiav, aspoň jedna má zelené sedlo. V stajni ostáva jedna ťava, ktorá môže mať tiež zelené sedlo. Preto aspoň dve ťavy musia mať zelené sedlo, aby aj v pätici, ktorú si Horus vyberie, bola aspoň jedna ťava so zeleným sedlom.
Keďže každé zo sediel je použité aspoň raz, musí mať Horus aj ťavu s modrým sedlom. Jediná možnosť ofarbenia sediel je teda nasledovná: tri ťavy s červeným sedlom, dve ťavy so zeleným sedlom a jedna ťava s modrým sedlom.
Sedlá sú očíslované číslami od 1 po 6. Súčet týchto čísel je: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Súčet čísel na červených a zelených sedlách je 15. Odpočítajme od celkového súčtu: 21 – 15 = 6. Modré sedlo je iba jedno, preto na tomto sedle musí byť číslo 6.

Súčet čísel na modrých a zelených sedlách je menej ako 11. Na modrom sedle je číslo 6, teda súčet čísel na zelených sedlách je menej ako: 11 – 6 = 5. Takýto súčet vieme dostať práve dvomi spôsobmi:
1 + 2 = 3 a 1 + 3 = 4. ***Výsledné očíslovania teda môžu byť až 2, a to takéto:***



Príklad č. 3 (*opravovali Aďa Santrová a Samo Tomašec*)

Ak nechceme týždeň čistiť ťavám stajne, potrebujeme číslo poskladať tak, aby rozdiely susediacich cifier boli čo najväčšie. Poďme sa teda pozrieť, aké rozdiely môžeme dostať.

Rozdiel 4 dostaneme keď spolu susedia cifry 5 a 1, rozdiel 3 keď susedia cifry 5 a 2 alebo 4 a 1, rozdiel 2 ak spolu susedia 5 a 3, 4 a 2 alebo 3 a 1 a nakoniec rozdiel 1 ak spolu susedia 5 a 4, 4 a 3, 3 a 2 alebo 2 a 1. Teda rozdiel 4 dostaneme len jediným možným spôsobom, rozdiel 3 dvomi, rozdiel 2 tromi a rozdiel 1 štyrmi spôsobmi.

Uvedomme si, že v päťcifernom čísle sú 4 páry susediacich cifier. Takže teoreticky by sme mali vedieť poskladať číslo, v ktorom budú najväčšie možné rozdiely 4+3+3+2=12. Tak ho poďme skúsiť poskladať.
Aby sme mali rozdiel 4, musia byť vedľa seba 1 a 5 (15 alebo 51). Ďalej chceme dvakrát rozdiel 3, teda vedľa 1 dáme 4 a vedľa 5 dáme 2 (zatiaľ máme 4152 alebo 2514). Nepoužili sme už iba cifru 3. Všimnime si, že či ju dáme na začiatok alebo na koniec, stále dostaneme rozdiel iba 1 (34152, 41523, 32514, 25143), takže súčet 12 nikdy nedocielime.

Najväčší súčet teda je 11=4+3+3+1 a s takýmito rozdielmi ho vieme dostať štyrmi vyššie uvedenými spôsobmi. Súčet 11 však vieme dostať aj ako 11=4+3+2+2, teda keď máme pri sebe 5 a 1 (15, alebo 51), potom 2 a 5 alebo 4 a 1 (152, 251 alebo 415, 514) a nakoniec dva rozdiely 2, konkrétne 3 pri 1 a 4 pri 2, alebo 2 pri 4 a 3 pri 5 (31524, 42513, 24153, 35142). Iným spôsobom už 11 nedostaneme.
Najväčší súčet je 11 a dosahujú ho čísla 34152, 41523, 32514, 25143, 31524, 42513, 24153, 35142.

Príklad č. 4 (*opravoval Anino Belan***)**
Táto úlohu ste riešili najčastejšie tromi spôsobmi:

Prvý spôsob bol, že ste nejakú časť zadania odignorovali, najčastejšie tú, že každá cesta má spájať dve mestá. Teda buď ste jedno mesto spojili s chatou alebo niečím nie-mestským, alebo jednou cestou spojili mestá tri. Potom sa vám podarilo nakresliť mapu, tá ale vďaka tomu, že nespĺňala zadanie, nebola dobre.

Druhý spôsob bol, že ste skúšali spájať mestá a keď sa to dlho nedarilo, tak ste si povedali, že to nejde. Niektorí nám napísali a poslali jeden takýto nevydarený pokus, niektorí viaceré. Problém je, že pri takýchto riešeniach sa zle rozlišuje medzi tým, či niekto mal smolu a medzi mnohými nesprávnymi riešeniami nenarazil na to jedno správne a medzi tým, že naozaj existuje dôvod, kvôli ktorému sa to nikdy nedá nakresliť. Takže aj za riešenia tohto typu sme dávali menej bodov.

Všetky body dostali tí, ktorí našli dôvod, kvôli ktorému sa taká mapa naozaj nedá nakresliť, aj keby sme to skúšali hocijako dlho. Ten dôvod môže vyzerať napríklad takto: Predstavte si, že na obidva konce každej cesty dáme ceduľu „pozor mesto". Koľko bude takýchto cedúľ? Ak by si zememerač pamätal veci správne, muselo by ich byť 21 (pretože pri každom meste sú tri cedule – pri každej ceste, ktorá z toho mesta vychádza je jedna – a miest je sedem). Ale keďže na každej ceste sú presne dve cedule, počet cedúľ musí byť párny (lebo je to dvakrát počet ciest). A keďže 21 nie je párne číslo, zememerač si niečo musel pamätať zle.

Príklad č. 5 (*opravoval Adam Kňaze***)**
Táto úloha sa dala riešiť naozaj veľa spôsobmi. Mohli ste sa pozerať na počet ebenových dverí, pravdivosť jedných konkrétnych dverí, alebo napríklad rozoberať všetky možnosti ako mohli byť jednotlivé dvere ebenové alebo nie. V tomto vzoráku si ukážeme prvé dva spôsoby.

Vieme že keď máme troje dvere, ebenové môžu byť žiadne, jedny, dvoje alebo troje. Tak sa pozrime na jednotlivé možnosti:

Ak by neboli ani jedny dvere ebenové, znamenalo by to, že tretie dvere, ktoré tvrdia „nanajvýš jedny dvere sú ebenové", by mali pravdu. Potom by však boli ebenové, a teda by neplatila podmienka ktorú sme si určili na začiatku.

Čo ak budú jedny dvere ebenové? Tretie dvere budú mať zase pravdu, teda budú ebenové. Keďže sme si povedali, že práve jedny dvere sú ebenové, budú to iba tretie dvere a prvé a druhé musia klamať. Strážca je potom za druhými dverami, keďže tvrdia „strážca nie je za týmito dverami" a klamú. A tým pádom naozaj klamú aj prvé dvere, lebo za nimi strážca nie je. Tým pádom táto možnosť vyhovuje.

Ak by boli ebenové dvoje dvere, tretie dvere by klamali a prvé a druhé dvere by potom museli byť ebenové. Strážca by bol potom za prvými dverami, lebo tvrdia „za týmito dverami je strážca" a sú pravdivé. Druhá dvere tiež naozaj hovoria pravdu, takže vyhovuje aj táto možnosť

Ak by boli pravdivé troje dvere, tretie dvere by zase klamali a teda by ebenové mohli byť maximálne dvoje dvere. To ale zase nesedí s podmienkou, ktorú sme si určili. ***Možné sú teda dva prípady. Nevieme určiť ktorý práve nastal, ale v oboch je strážca buď za prvými alebo druhými dverami, a tretie sú bezpečné.***

Druhý spôsob bol pozrieť sa na jedny konkrétne dvere, napríklad prvé (ale rovnako ste sa mohli pozrieť aj na druhé alebo tretie). Prvé dvere tvrdia „za týmito dverami je strážca". Môžu byť ebenové alebo z iného dreva, teda buď vravia pravdu alebo klamú. Ak vravia pravdu, je za nimi strážca. Keďže je len jeden, nemôže byť za druhými dverami ktoré tvrdia „za týmito dverami nie je strážca". Potom ale majú pravdu aj druhé dvere, teda sú ebenové minimálne dvoje dvere a tretie dvere klamú.

Ak prvé dvere klamú, strážca za nimi určite nie je. Ak je za druhými dverami klamú aj tie, a teda tretie dvere majú pravdu.
Ak nie je za druhými dverami, vravia pravdu, a tým dostávajú tretie dvere do nepríjemnej situácie. Ak by mali tretie dvere pravdu, boli by dvoje pravdivé dvere a tretie dvere by klamali. Ak by klamali, boli by jedny pravdivé dvere a teda by mali pravdu. V oboch prípadoch vzniká spor, teda ak prvé dvere klamú, musia klamať aj druhé a teda strážca je za nimi. Z toho nám vychádza to isté čo pri predchádzajúcom spôsobe. ***Strážca je buď za prvými alebo za druhými dverami, a teda Ebonika môže tretími v kľude ujsť.***

Príklad č. 6 (*opravoval Kajo Hrubják*)
Ako ste mnohí zistili, dôležité bolo napojiť jednu karavánu čo najviac vodou. A to hlavne preto, aby zašla aj ďalej ako do Káhiry a mohli sa po ňu vrátiť z druhej strany (od konca cesty). Dalo sa to riešiť napríklad s okružnou trasou rozdelenou na šestiny, alebo osminy.

Rozdelenie na osminy: Z Alexandrie vyrazia všetky tri karavány plne naložené vodou. Po prvej osmine cesty má každá z nich už len ¾ zásob, keďže ¼ minuli na cestu. Jedna z karaván rozdelí svoje ¾ tak, že dá po ¼ zvyšným dvom karavánam a sama sa so zvyšnou ¼ vráti napäť do Alexandrie. Zvyšné karavány sú teda plné a pokračujú ďalej o jednu osminu, teda do polovice cesty medzi Alexandriou a Káhirou a do štvrtiny celého okruhu. Tam jedna z karaván odovzdá tej druhej (hlavnej) ¼ svojich zásob (úplne jej doplní zásoby) a so zvyšnou polovicou sa vráti. Hlavná karavána pokračuje v ceste až kým neminie všetku vodu, teda až do ¾ okruhu. Naproti nej sa vydá jedna z karaván, ktorá sa vrátila a doplnila si zásoby. Minie si pri tom ½ svojej vody a zvyšok si podelia, teda majú po ¼ a môžu prejsť ďalšiu osminu trasy. Tam im dôjdu zásoby. Tretia karavána tam príde s ¾ zásob, keďže bola plná a ¼ minula na cestu. Tieto ¾ si rozdelia po ¼ pre každú z troch karaván a vrátia sa spoločne poslednou osminou trasy naspäť do Alexandrie.

Rozdelenie na šestiny: Z Alexandrie odídu 2 karavány. V 1/6 trasy keď už majú obe iba 2/3 zásob vody, jedna z karaván odovzdá druhej (hlavnej) 1/3 vody. So zvyšnou tretinou vody sa táto pomocná karavána vráti. Hlavná je plná a prejde ešte ďalšie 3 šestiny celkovej trasy. Zájde až do 4/6 tejto trasy a dôjde jej voda. Pomocná karavána spolu s treťou karavánou (druhou pomocnou) odídu z Alexandrie smerom od konca trasy. V 1/6 trasy prenechá jedna druhej 1/3 vody a so zvyšnou tretinou sa vráti a doplní svoje zásoby. Tá druhá je plná a pokračuje o ďalšiu tretinu smerom k hlavnej, kde sa stretnú. Tam sa s hlavnou rozdelia o vodu – každá bude mať po 1/3 zásob. Spolu takto prejdú 1/6 trasy smerom k cieľu v Alexandrii a minie sa im voda. Tretia karavána s doplnenými zásobami príde z Alexandrie po hlavnú karavánu – 1/3 vody minie na cestu k nej, 1/3 jej dá na návrat do Alexandrie a 1/3 minie na svoj návrat. Podobne sa vráti aj po zvyšnú karavánu, s ktorou sa spoločne vrátia do Alexandrie.
Existujú aj iné správne spôsoby riešenia, no tieto ste využívali najčastejšie. Všimnite si taktiež, že pri týchto spôsoboch naozaj žiadna z karaván nikdy neviezla viac ako 4/4 alebo 3/3 vody a zároveň sa všetky karavány vrátili.