JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2015/16, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Prvé kolo nebolo ľahké, oplatí sa preto dobre preštudovať správne riešenia. Určite vám to pomôže a skúsenosti môžete využiť v ďalších kolách. O miesta na sústredení sa dá ešte stále zabojovať.
Naika, Rudolfus, Ebonika aj Horus sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam a dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami. Pred počítaním nových úloh si môžete vylepšiť vaše matematické bunky prečítaním týchto vzorových riešení.
Pripomíname, aby ste vypĺňali hlavičku na každé riešenie, a pokiaľ možno na vrch papiera. Skontrolujte si Vaše údaje v poradí, ak niektoré nie sú správne dajte nám vedieť v riešeniach druhého kola alebo mailom na sezam@sezam.sk. Nám to pomôže pri organizácii. Ešte vás chceme poprosiť, aby ste, nám pokiaľ nemáte vážny, problém posielali aj obálky s vypísanou spätnou adresou, ušetríte nám tým veľa práce a času.
A nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Maťa Kudelčíková)

Zo zadania vieme, že hľadáme dve 3-ciferné čísla, ktorých súčet je **702**. Na výber máme číslice 1,2,4,5,7 a 8, pričom každé z nich je použité práve raz.
Začneme s číslicami na mieste jednotiek. Súčet 2 z našich číslic nemôžeme dostať bez zopakovania cifry 1, preto hľadáme súčet 12. Tento súčet dostaneme iba ako 4+8 alebo 5+7. Do súčtu stĺpca desiatok nám 1 ostane. Na mieste desiatok preto musí byť súčet 9, aby sme po pričítaní 1 (ktorá nám ostala) dostali 10. Tento súčet získame ako 1+8, 2+7 alebo 4+5. Opäť sa nám prenáša 1, tento krát na miesto stoviek. Výsledný súčet má byť 7, preto tam potrebujeme dosadiť číslice so súčtom 6: 2+4 alebo 1+5. Vylúčime možnosti, kde by sa nám opakovali rovnaké čísla a spíšeme si všetky možnosti, ktoré môžu nastať:

2	1	5
4	8	7

4	1	5
2	8	7

1	2	4
5	7	8

5	7	4
1	2	8

2	8	5
4	1	7

4	8	5
2	1	7

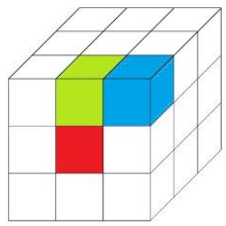
1	7	4
5	2	8

5	2	4
1	7	8

Týchto možností je 8, no v každej môžeme ešte vymeniť vrchný a spodný riadok, keďže pri sčítavaní nie je dôležité poradie sčítancov. ***Všetkých možností je teda 16.***

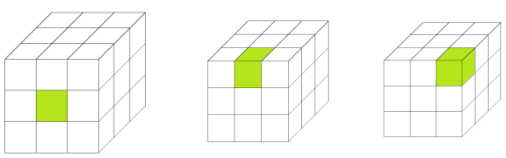
Príklad č. 2 (opravovala Betka Bohiníková)

Tento príklad bol pomerne náročný na predstavivosť, a preto veľmi pomohlo, ak ste riešili s pomocou nejakej kocky, na ktorej ste si mohli skúšať všetky rôzne rozloženia 2 bielych a 25 čiernych kociek a pri tom si ju aj otáčať. Bolo výborné začať si to kresliť. No najťažšie asi bolo nájsť naozaj všetky možnosti, keďže sa veľmi ľahko stalo, že ste si nevšimli, že sa vám niektoré kocky vedeli na seba otočiť a na niektoré sa zase ľahko zabudlo. Dôležité preto bolo dobre si rozmyslieť nejaký systém ako nezabudnúť na žiadnu možnosť. Niektorí ste to skúšali tak, že ste si najprv kreslili možnosti kde boli 2 biele kocky na jednej stene, potom na vedľajších a nakoniec na protiľahlých. Tu bolo potrebné nezabudnúť na to, že sa musím pozerať na celú kocku a nie len na tú časť, čo práve riešim. Práve tu sa totiž veľmi často stávalo že ste si nevšimli, že ste vytvorili kocku, ktorú už máte. Ďalšie spôsoby boli rozdeliť si kocku na poschodia, alebo nájsť postupne všetky možnosti, keď bolo z jednej bielej kocky vidieť len 1, 2 alebo 3 steny.
Tu je jeden z možných spôsobov:
Vo veľkej kocke máme tri možné pozície malej kocky. Buď je v rohu (modrá), strede (zelená) hrany alebo v strede steny (červená).

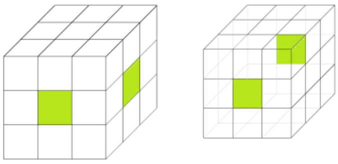


Teraz skúsime roztriediť možnosti podľa toho, koľko stien z bielych kociek vidíme (na obrázkoch sú biele označené zelenou farbou).

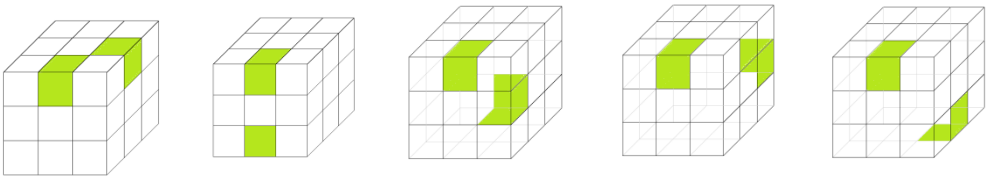
1) jednu kocku nevidím vôbec (je v strede), z druhej vidím postupne jednu, dve a tri steny



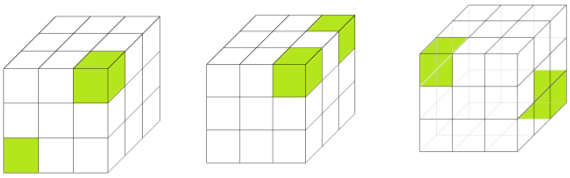
2) z obidvoch kociek vidím len jednu stenu



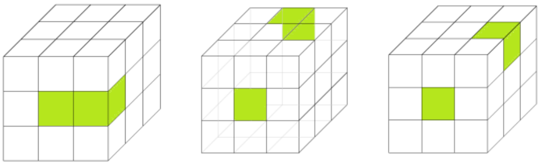
3) z obidvoch kociek vidíme 2 steny



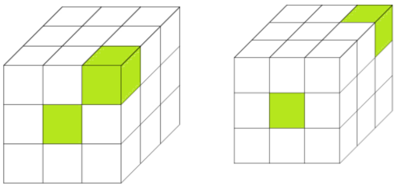
4) z obidvoch vidíme 3 steny



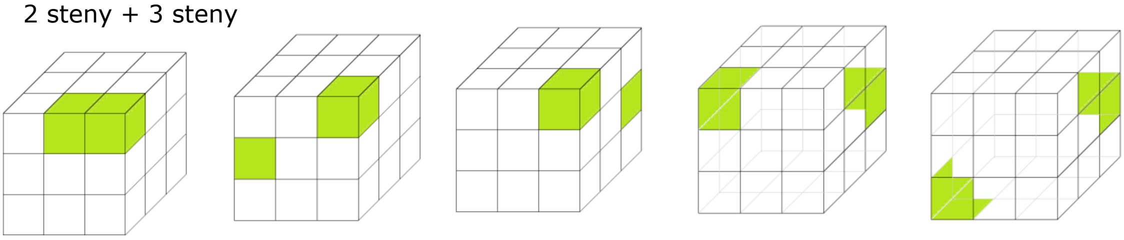
5) jedna stena + 2 steny



6) jedna stena + 3 steny



7) 2 steny + 3 steny



Príklad č. 3 *(opravovala Kayči Čárska)*

Pred samotným riešením sa naozaj oplatilo minimálne 50x hodiť kockou. Pri hádzaní si môžete všimnúť, že výťah nebude chodiť rovnako často na všetky poschodia. Napr. 5.poschodie sa vo výsledkoch vyskytuje menej často než prízemie. Je teda menšia šanca, že výťah skončí na 5.poschodí, ako že skončí na prízemí. Prečo je to tak? Počet všetkých možností ako môžeme hodiť kocky je 36. Poschodia, na ktorých skončí výťah pri jednotlivých hodoch kockami, sú zaznačené v tabuľke. Napr. 3.stĺpec a 2.riadok: 3 a 2. Rozdiel hodnôt je 1, výťah skončí na 1.poschodí.

Po preskúmaní tabuľky zistíte, že sa v nej najčastejšie objavuje 1.poschodie. To znamená, že pri veľkom počte hodov je najvyššia šanca, že bude výťah najčastejšie chodiť na 1.poschodie. Ako väčšina z Vás správne napísala, nie je to však isté. Tomuto poschodiu je len priradená najvyššia šanca. Naopak najmenej krát sa v tabuľke vyskytuje 5.poschodie. (Porovnajte si to s výsledkami vašich hodov). Pri skutočných hodoch kockami to tak nemusí byť vždy. Táto vlastnosť sa objaví až pri dostatočne veľkom počte pokusov. Preto sa niektorým z Vás ani po päťdesiatich hodoch kockami nepodarilo zistiť, na ktoré poschodie bude výťah chodiť najčastejšie.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Príklad č. 4 (opravoval Anino Belan)

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Jedna možnosť bola vypísať si všetky možnosti, ako môžu byť Rudolfus, Naika a Horus doma a potom vylúčiť tie, ktoré odporujú zadaniu. Všetkých možností je osem:

	Rudolfus	***Naika***	***Horus***
1.	Doma	Doma	Doma
2.	Doma	Doma	Preč
3.	Doma	Preč	Doma
4.	Doma	Preč	Preč
5.	Preč	Doma	Doma
6.	Preč	Doma	Preč
7.	Preč	Preč	Doma
8.	Preč	Preč	Preč

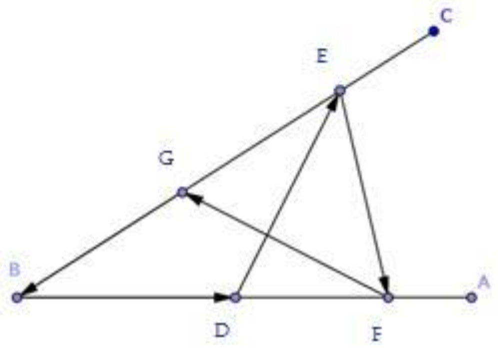
Keďže vieme, že ak nie je doma Rudolfus, tak je doma Naika, tak vidíme, že možnosti 7 a 8 sú zlé. Keďže vieme, že ak je doma Horus, tak doma nie je Naika, tak vidíme, že možnosti 1 a 5 sú zle. A keďže vieme, že ak nie je doma Horus, tak je doma Rudolfus, tak vidíme, že možnosti 6 a 8 sú zle. Ostali nám teda iba možnosti 2, 3 a 4. A keďže je Rudolfus v každej z nich doma, tak musí byť doma.

Úloha sa dala riešiť aj inak: Sú iba dve možnosti. Buď Horus je doma, alebo nie je. Ak Horus nie je doma, tak podľa tretej vety Rudolfus je. Ak Horus je doma, tak podľa druhej vety určite nie je doma Naika. Ale keďže podľa prvej vety vieme, že Naika a Rudolfus nemôžu byť naraz preč, tak Rudolfus musí byť doma. Rudolfus teda musí byť doma aj keď Horus doma je, aj keď doma nie je. (Podobne sa dá úloha riešiť aj keď namiesto Horusa začneme s Naikou.)

Ešte iná možnosť je ukázať, že predpoklad, že Rudolfus nie je doma, má za dôsledok niečo, čo nie je pravda. To by znamenalo, že ten predpoklad je zle. Ak Rudolfus nie je doma, podľa prvej vety vieme, že je doma Naika. Ale druhá veta nám hovorí, že Naika a Horus nie sú naraz doma, takže Horus musí byť preč. A tretia veta nám hovorí, že keď je Horus preč, Rudolfus musí byť doma. Ale to je zle, lebo sme predpokladali, že Rudolfus doma nie je. A keďže sme ukázali, že je ten predpoklad zle, tak Rudolfus musí byť doma.

Príklad č. 5 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Miesta, kde kobylka doskočila, označme tak, ako na obrázku. Snažíme sa zistiť veľkosť uhla CBA, označme ho α. Keďže kobylka robí rovnako dlhé skoky, trojuholníky BED a BFG sú rovnoramenné. Takže aj uhly BED a BFG majú veľkosť α. Súčet uhlov v trojuholníku je 180°, preto uhly BDE a BGF majú veľkosť 180° – 2α. Uhol EGF je susedný k uhlu BGF a preto je jeho veľkosť 180° – (180° – 2α) = 2α. Rovnako uhol EDF má veľkosť 2α, lebo je susedným uhlom k uhlu BDE. Trojuholník GEF je rovnoramenný, preto sú uhly EGF a GEF rovnako veľké. Teda veľkosť uhla GEF je 2α. Aj uhly EDF a DFE sa rovnajú, lebo DFE je rovnoramenný trojuholník. Takže veľkosť uhla DFE je rovnaká ako veľkosť uhla EDF a to 2α.



Všimnime si, že pre súčet uhlov v trojuholníku BFE platí: 5α = 180°. Z toho dostávame α=36°.

Veľkosť uhla CBA je 36°.

Príklad č. 6 (*opravovala Denisa Múthová*)

Rudolfus si na púšti napísal do piesku dlhokánske číslo, zložené len z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5 a 6. V jeho čísle sa nachádzali všetky dvojciferné kombinácie vyššie uvedených cifier. T.j. 10 11 12 13 14 15 16 – 20 21 22 23 24 25 26 – 30 31 32 33 34 35 36 – 40 41 42 43 44 45 46 – 50 51 52 53 54 55 56 – 60 61 62 63 64 65 66. Dokopy je to 42 rôznych dvojciferných čísel a teda 84 cifier.

Našou úlohou je nájsť čo najkratšie číslo tak, aby v ňom boli všetky dvojciferné kombinácie 0 až 6. Najskôr sme si všimli, že napr. čísla 111213 sa dajú usporiadať ako 11213, teda jedna cifra nám zmizne. Tento postup je možný zo všetkými číslami, okrem tých, ktoré sa končia 0, pretože pri zmene poradia či vypadnutí cifry, by sa číslo zmenilo na jednociferné. Začnime usporadúvať čísla, ktoré nemajú v sebe 0.

11213141516- v tomto čísle okrem všetkých začínajúcich na 1 sú aj čísla 21, 31, 41 a 51

-223242526- v tomto čísle už máme aj všetky čísla začínajúce na 2 sú aj 32, 42 a 52

-3343536- teraz všetky čísla na 3, plus 43 a 53

-44546- tu sú všetky 4 a navyše aj 54

-556- a na koniec aj -6, teraz máme všetky čísla okrem 61 a čísiel s 0 (10, 20, 30, 40, 50, 60).

Reťazec teraz vyzerá takto:

11213141516223242526334353644546556 6

Doplníme zvyšné čísla, začneme 10, pretože chceme ešte vytvoriť 61.

Celé dlhokánske číslo je tvorené 48 ciframi:

112131415162232425263343536445465566102030405060

Týmto spôsobom sme vytvorili najkratšie možné číslo, podľa uvedených podmienok. Kratšie by už bez straty nejakého dvojciferného čísla nešlo.