JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2017/18, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Sára a Arthur sú vďační za vašu pomoc s problémami z prvej série a veria, že sa úspešne popasujete aj s úlohami z druhej série. Ak si chcete, predtým než sa do nich pustíte, precvičiť svoje matematické bunky, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Maťa Kudelčíková)

	A	B	C	D	E
1					
2		**21**			
3	**25**			**19**	
4					
5			**10**		

Na začiatok si označme riadky v tabuľke 1-5 a stĺpce A-E. Doplníme čísla, ktoré sú zjavné:

- na diagonále **16** je len jedno políčko, preto do neho doplníme 16 = A1.
- na diagonále **11** je taktiež iba jedno políčko, preto v ňom bude 11 = E5.
- na diagonále **68** chýba len jedno číslo, a to C1 = 68 – 25 – 21 = 22.
- na diagonále **40** dopočítame B4 = 40 – 25 – 10 = 5.

Poďme sa pozrieť na to, aký súčet bude v každom riadku a stĺpci. Tabuľku musíme vyplniť číslami 1 až 25, každé tam musí byť práve raz. Súčet celej tabuľky preto bude 1 + 2 + 3 + 4 + … + 23 + 24 + 25 = 325. Každé číslo je však zarátané aj do riadku, aj do stĺpca, preto celkový súčet vydelíme počtom riadkov (stĺpcov) 325 : 5 = 65. Každý riadok a stĺpec bude mať teda súčet 65.

Zo stĺpcov a riadkov zatiaľ nevieme nič jasné zistiť, prejdime si najskôr čísla, ktoré môžu byť na diagonálach:

- na diagonále **15** už máme číslo 5, preto nám ostáva 15 – 5 = 10 rozložiť na štyri čísla. To sa dá jedine ako 1+2+3+4 = 10. Tieto čísla preto nemôžeme použiť nikde inde.
- na diagonále **55** chýbajú už len 2 políčka so súčtom 55-11-16-21 = 7. Tento súčet vieme dostať jedine ako 1+6, 2+5, 3+4. No 2, 5, 3 a 4 musia byť všetky aj na diagonále **15**, preto jediná možnosť je 1+6. Číslo 1 musí byť na políčku C3 (lebo je súčasťou diagonály **15**) a 6 na D4.
- teraz vieme dopočítať aj E3 z diagonály **23**: 23 – 10 – 6 = 7.
- D2 z diagonály **31** bude 31 – 22 – 7 = 2.
- ďalej využijeme to, že vieme aký súčet je v každom riadku. Preto z 3. riadku: B3 = 65 – 25 – 1 – 19 – 7 = 13.
- súčet diagonály **17** vieme dostať bez použitia čísel už napísaných alebo obsadených do diagonály **15** jedine ako 8+9, nevieme však zatiaľ ako ich umiestnime.
- súčet diagonály **47** vieme dostať za predošlých podmienok jedine ako 23+24, tiež ale nevieme ktoré číslo bude na ktorom políčku.
- sčítaním stĺpca B môžu byť v políčku B5 iba dve čísla podľa toho, či bude v B1 číslo 8 alebo 9 : 65 – 21 – 13 – 5 – 8 = 18, 65 – 21 – 13 – 5 – 9 = 17. Ak B5 = 18, potom dopočítaním do diagonály **29** bude A4 = 11. To však nemôže byť, keďže 11 sme už použili. Preto bude správna druhá možnosť. B1 = 9, B5 = 17, A4 = 12, z diagonály **17** bude A2 = 8.

Zvyšok dopočítame už ľahko:

- z prvého stĺpca A5 = 65 – 16 – 8 – 25 – 12 = 4.
- na diagonále **15** nám ostalo jediné voľné políčko E1 = 15 – 4 – 5 – 1 – 2 = 3.
- z piateho riadku D5 = 65 – 4 – 17 – 10 – 11 = 23.
- z diagonály **47** vieme, že E4 = 24.
- z E stĺpca vieme E2 = 65 – 3 – 7 – 24 – 11 = 20.
- 1. riadok dopočítame ako 65 – 16 – 9 – 22 – 3 = 15 = D1.
- 2. riadok dopočítame 65 – 8 – 21 – 2 – 20 = 14 = C2.
- 4. riadok bude 65 – 12 – 5 – 6 – 24 = 18 = C4.

Výsledná tabuľka vyzerá preto takto:

16	9	22	15	3
8	**21**	14	2	20
25	13	1	**19**	7
12	5	18	6	24
4	17	**10**	23	11

Príklad č. 2 (*opravovala Ivka Hrivová*)

Našou úlohou je zistiť, ktoré z čísel 8612, 4322, 9867 a 13859 sa dajú napísať pomocou súčtu ABCD + BCDA (každé konkrétne písmenko predstavuje konkrétnu číslicu). Preskúmajme bližšie tento súčet. Číslo ABCD sa dá rozpísať ako 1000 · A + 100 · B + 10 · C + 1 · D a číslo BCDA vieme rozpísať v tvare 1000 · B + 100 · C + 10 · D + 1 · A.

Teda náš súčet je rovný:

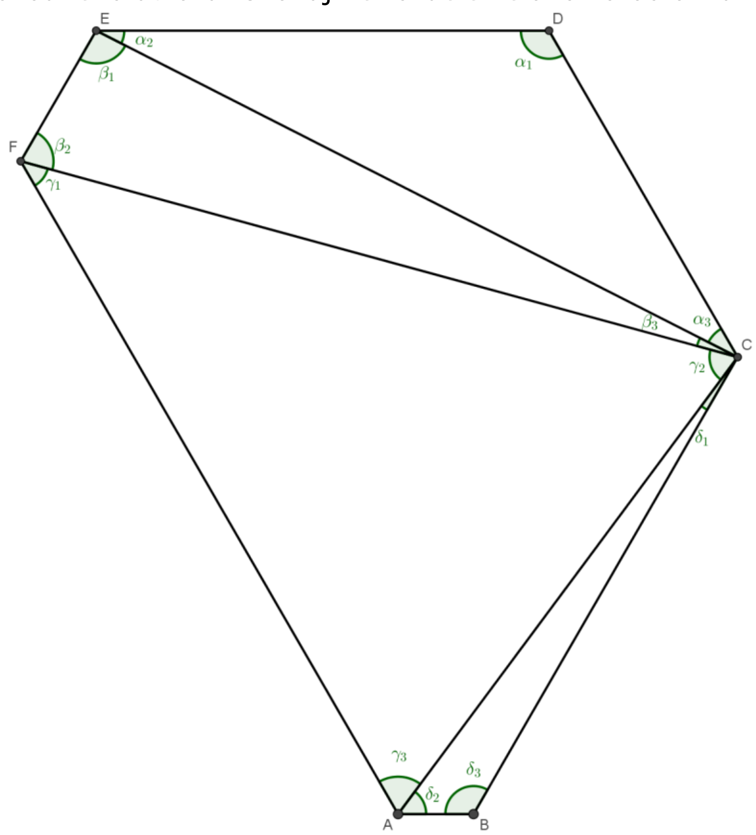
$$1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 1 \cdot D + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + 1 \cdot A =$$
$$= 1001 \cdot A + 1100 \cdot B + 110 \cdot C + 11 \cdot D = 11 \cdot (91 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 1 \cdot D)$$

Z tohto zápisu je vidieť, že každé číslo, ktoré vieme zapísať ako ABCD+BCDA, musí byť deliteľné číslom 11.

Už nieje zložité overiť, že tejto podmienke vyhovuje iba číslo 9867.

Príklad č. 3 (*opravoval Kubo Kaloč*)

Veľa z vás sa snažilo použiť myšlienku, že ak súčet vnútorných uhlov vydelíme šiestimi, tak vďaka znalosti toho, že všetky uhly v šesťuholníku sú rovnako veľké, dostaneme veľkosť jedného vnútorného uhla. Na to sme však potrebovali zistiť samotný súčet vnútorných uhlov. Najjednoduchší spôsob ako tento súčet nájsť je rozdeliť útvar na trojuholníky tak, aby vrcholy všetkých trojuholníkov boli zároveň vrcholmi pôvodného útvaru. Uvažujme rozdelenie ako na obrázku.

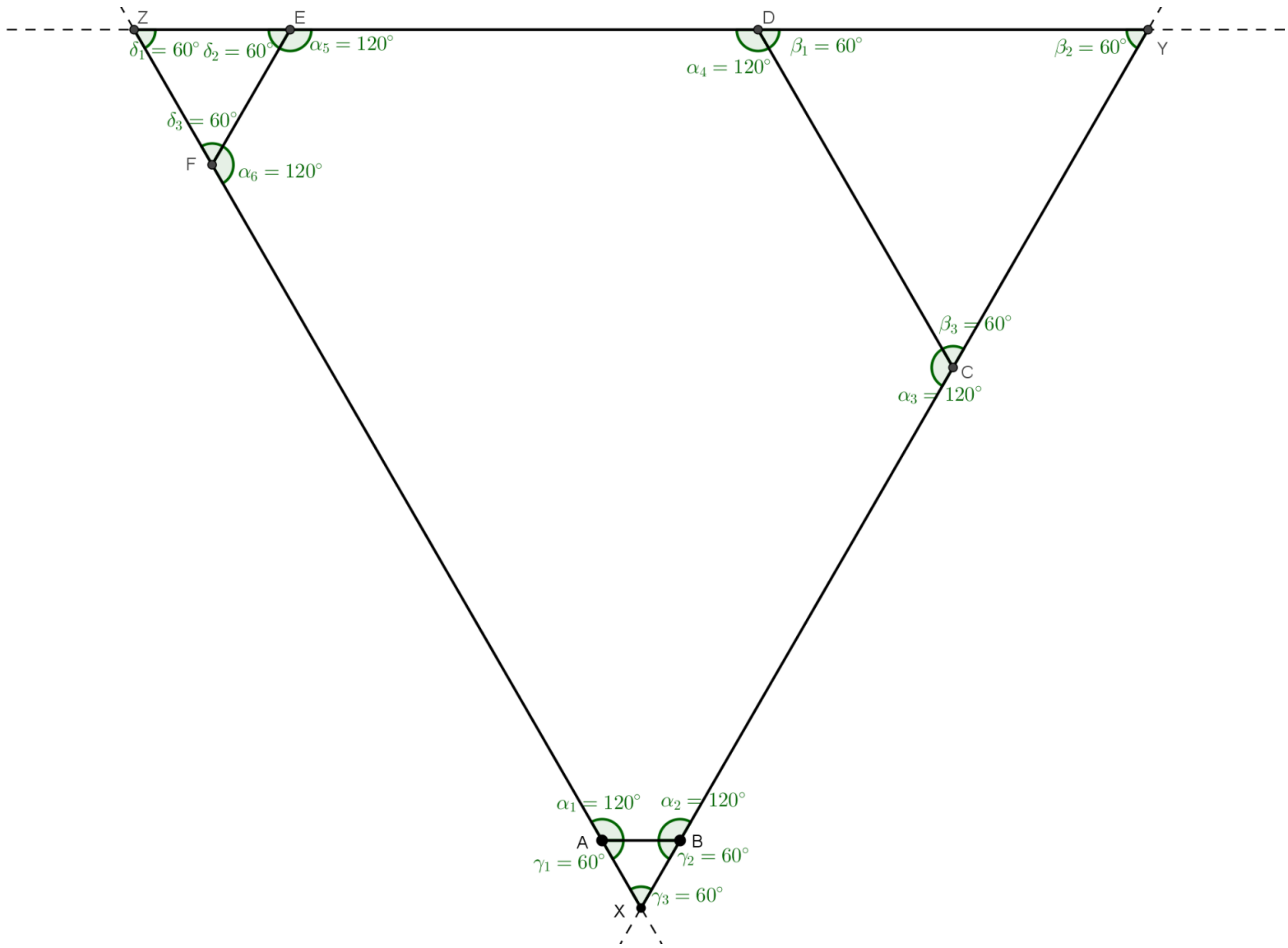


Vznikli 4 trojuholníky, kde každý má súčet vnútorných uhlov 180°. Všimnime si, že uhly pôvodného šesťuholníka zostali buď zachované alebo boli rozdelené ako jednotlivé uhly rôznych trojuholníkov, pričom v žiadnom trojuholníku sme nevytvorili uhol, ktorý by nebol súčasťou pôvodného vnútorného uhla šesťuholníka. Teda súčet uhlov vo všetkých trojuholníkoch je rovný súčtu vnútorných uhlov (označme ho S_6) v našom šesťuholníku. Teda $S_6 = 180° \cdot 4 = 720°$

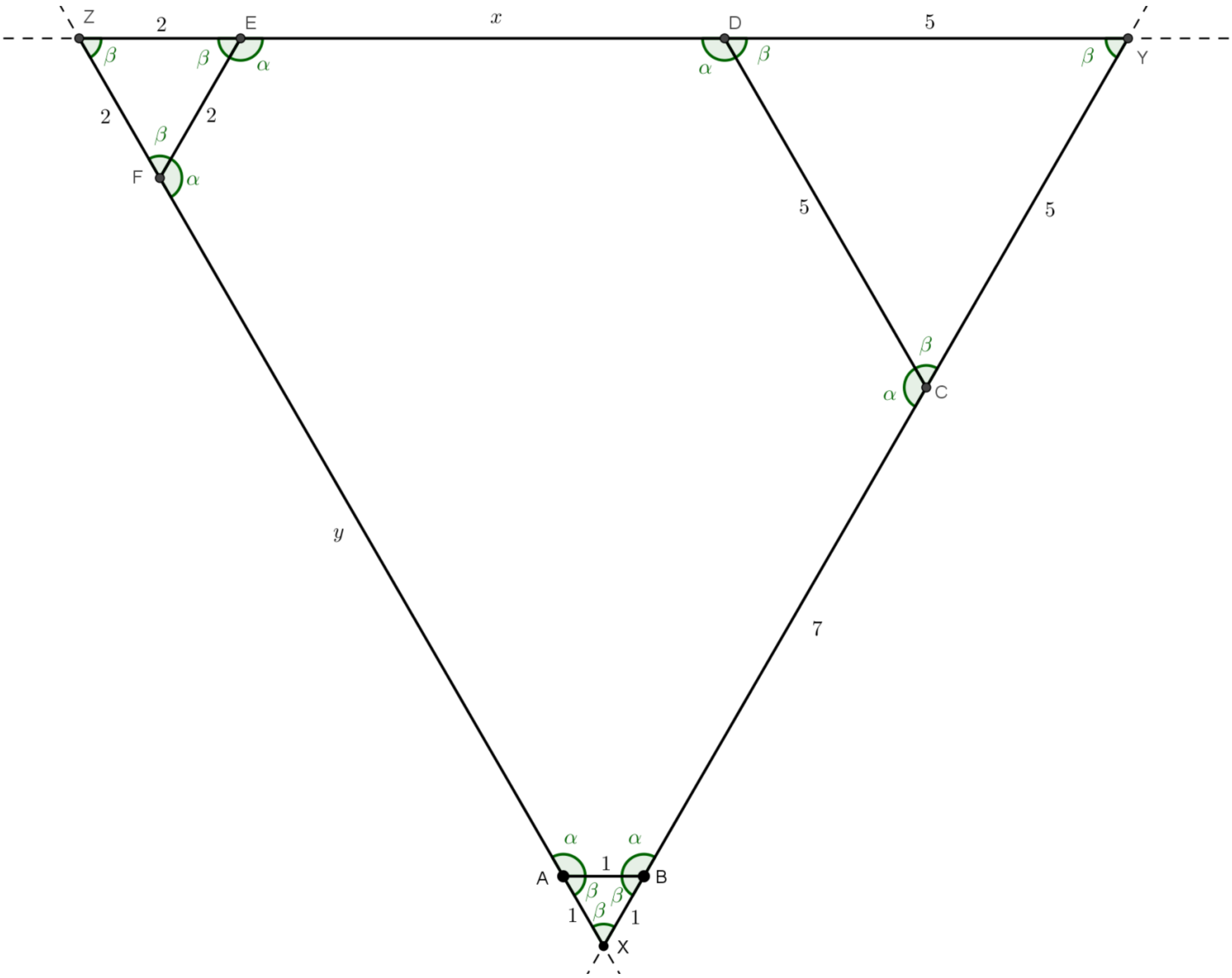
Vďaka tomu vieme vypočítať veľkosť vnútorného uhla v našom šesťuholníku:

$$S_6 : 6 = 720° : 6 = 120°.$$

S využitím znalostí o susedných uhloch ste si uvedomili, že keďže sú všetky vnútorné uhly 6-uholníka rovnako veľké, tak aj ich susedné uhly budú rovnako veľké. Preto ste predlžovali strany 6-uholníka. To sa dalo urobiť viacerými spôsobmi, v našom prípade predĺžime stranu BC, ED a FA a vzniknuté priesečníky označíme X, Y, Z, tak ako na obrázku.



Uhly β_1, β_3, γ_1, γ_2, δ_2, δ_3 sú susedné uhly k vnútorným uhlom 6-uholníka. Susedné uhly majú súčet 180° a teda sa ľahko dopočíta, že $\beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_2 = \delta_3 = 60°$. V trojuholníkoch DCY, ABX, EFZ máme známe 2 uhly a keďže súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°, tak ľahko zistíme, že $\beta_2 = \gamma_3 = \delta_1 = 60°$. Všimnime si, že sme ukázali, že trojuholníky DCY, ABX, EFZ majú všetky uhly veľké 60° a teda sú rovnostranné, pričom poznáme dĺžky jednej strany každého z nich. Doplníme dĺžky strán a dostaneme útvar na obrázku.



Zároveň keď sa pozrieme na trojuholník XYZ, tak zistíme, že aj ten má všetky uhly rovnako veľké a teda je rovnostranný. Označme neznáme strany ako x a y. Keďže je XYZ rovnostranný, tak platí:

$$|XY| = |YZ| = |XZ|$$
$$|XB| + |BC| + |CY| = |YD| + |DE| + |EZ| = |ZF| + |FA| + |AX|$$
$$1 + 7 + 5 = 5 + x + 2 = 2 + y + 1$$
$$13 = x + 7 = y + 3, \text{ a teda } x = 6 \text{ a } y = 10$$

Naše neznáme strany majú dĺžku 6 a 10.

Príklad č. 4 (opravovala Ajka Bachratá)

Chceme zistiť, či sa vie každé vnúča dozvedieť všetkých 10 zložiek receptu na menej ako 18 volaní. Treba si uvedomiť, že pri každom volaní si vnúčatá môžu povedať všetko, čo už vedia. Teda nie len svoju zložku receptu, ale aj ostatné zložky, ktoré vedia od detí s ktorými už volali predtým. Aby sa nám o vnúčatách ľahšie hovorilo, tak si ich označíme veľkými písmenami A (Anička), B (Betka), C (Cyril), D, E, F, G, H, I a J (Juro).

Skúsme najskôr vyriešiť ľahšiu úlohu – koľko potrebujeme volaní, aby aspoň jedno vnúča vedelo všetkých 10 zložiek? Vybrala som si vnúča A. Aby sa A dozvedelo všetky zložky, tak musí zavolať všetkým ostatným deviatim vnúčatám (napr. v poradí A-B, A-C, A-D, A-E, A-F, A-G, A-H, A-I a ako posledné volanie A-J). Po týchto 9 volaniach už bude A vedieť všetky zložky, no nebude jediné. Pred posledným volaním, už vie A zložky od všetkých vnúčat okrem J. Takže pri poslednom volaní s J mu ich môže všetky povedať. Tým pádom bude A aj J vedieť všetkých 10 zložiek a potrebovali na to zatiaľ **9 volaní**.

Teraz už len treba aby sa všetky zložky dozvedelo zvyšných 8 vnúčat. Na to stačí, keď každé z nich zavolá buď A, alebo J, ktoré už vedia všetko a teda im všetko môžu povedať . Bude na to treba **8 volaní** (napr. B-A, C-A, D-A, E-A a F-J, G-J, H-J, I-J).

Takže spolu sme potrebovali 17 volaní a všetky vnúčatá už vedia všetkých 10 zložiek receptu.

Poznámka k riešeniu:

Niektorým z vás sa podarilo úlohu vyriešiť na ešte menej volaní. Na splnenie úlohy stačilo nájsť jednu možnosť na menej ako 18, takže takéto (na 17 volaní) riešenie stačí. Komu sa podarilo na menej je veľmi šikovný. Ostatní si to ešte vyskúšajte, alebo sa môžete spýtať kamarátov, ako sa to dá na ešte menej.