JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Ian, Jean a Brianna sú vďační za vašu pomoc s problémami z prvej série a veria, že sa úspešne popasujete aj s úlohami z druhej série. Ak si chcete, predtým než sa do nich pustíte, precvičiť svoje matematické bunky, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Baška Marečáková)

Naši traja cestovatelia vás poriadne potrápili s cifernými súčinmi. Keďže je 10 800 súčin, tak potrebujeme vedieť, aké čísla nám ho po vynásobení určite dajú. Tieto čísla potom použijeme na tvorbu ciferného súčinu, teda chceme, aby boli jednociferné. Po chvíli delenia čísla 10 800 dostávame nasledovný súčin:

$$10\,800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Brianna našla najmenšie číslo. Čím má číslo menej cifier, tým je menšie. Zároveň na mieste jednotiek by mala byť najväčšia cifra, na mieste desiatok druhá najväčšia a tak ďalej. Na tvorbu čísla použijeme náš veľký súčin pre 10 800, kde čísla medzi sebou môžeme násobiť, ale nesmú byť dvojciferné, aby sme ich mohli použiť v Brianninom čísle. Dve trojky nám dajú 9, tri dvojky nám dajú 8, dvojka a trojka nám dajú 6, päťky nemôžeme s ničím násobiť, lebo by sme dostali dvojciferné číslo. Z týchto úvah vieme povedať, že najmenšie možné Briannino číslo je 55 689.

Ian hľadal najväčšie číslo. Veľkosť súčinu sa nezmení, ak ho vynásobíme číslom 1. To znamená, že ak by sme k Brianninmu číslu dopísali na koniec desať cifier 1, tak číslo má ciferný súčin stále 10 800. Rovnako by sme mohli dopísať aj sto cifier 1. Vieme nájsť najväčšie číslo s ciferným súčinom 10 800? Ak si vezmeme hocijaké číslo s ciferným súčinom 10 800, tak na jeho koniec môžeme dopísať hoci len jednu cifru 1 a dostaneme väčšie číslo so súčinom 10 800. Ian teda nemohol nájsť najväčšie číslo, lebo pripísaním cifry 1 na jeho koniec by dostal väčšie číslo s rovnakým ciferným súčinom.

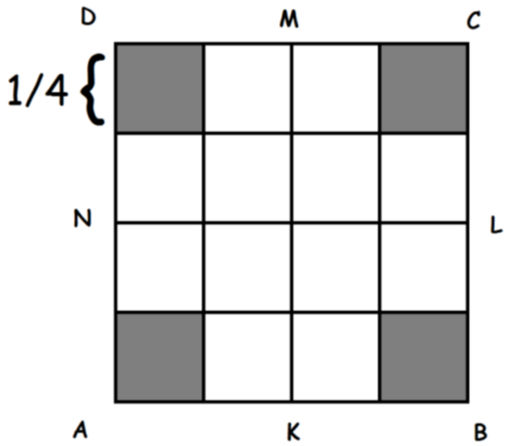
Jean hľadal číslo so všetkými ciframi rôznymi. Ako sme už uvažovali, cifry musia byť zložené z nášho veľkého súčinu pre 10 800. V ňom máme číslo 5 dvakrát. Ak by sme chceli niečím päťku prenásobiť, aby sme získali odlišné číslo, tak nastáva problém. Najmenší možný násobok, ktorý nám dá odlišné číslo je $5 \cdot 2 = 10$, čo je však už dvojciferné číslo a nemôžeme ho v Jeanovom čísle použiť ako cifru. Jean teda nemohol nájsť číslo so všetkými ciframi odlišnými.

Zistili sme, že Brianna mala číslo 55 689 a Ian s Jeanom svoje čísla nenašli.

Príklad č. 2 (opravoval Samo Molčan)

Vieme, že studňa má štvorcový pôdorys. Vyznačíme si stredy jeho strán (K, L, M, N). Vezmime si teraz napríklad úsečku AK. Nájdeme stred úsečky AK a spravíme v ňom kolmicu na túto stranu (vznikne os strany AK, o osiach strán ste myslím už niečo počuli ☺). Ak minca padne naľavo od tejto osi, vzhľadom na roh A zmizne, ak napravo, tak vzhľadom na stred strany K zostane v studni. Podobnú úvahu použijeme na všetky úsečky tvorené stredom strany a prislúchajúcim rohom.

Osi týchto úsečiek nám rozdelia studňu na 16 rovnakých štvorcov, kde jeden takýto štvorec ma dĺžku strany ¼ z dĺžky studne. Dostaneme takéto rozdelenie studne:



Teraz vieme, že ak mince padnú do tmavých štvorcov, tak budú bližšie k rohom než stredom strán, a teda zmiznú. To znamená, že mince zmiznú v 4/16 studne. Mince padajú na každé miesto studne s rovnakou pravdepodobnosťou, a teda ostane $1 - 4/16 = 12/16 = 3/4$ z pôvodného počtu mincí. To nás vedie k výpočtu:

$$100 \text{ mincí} \cdot 3/4 = 75 \text{ mincí}.$$

Takto sme zistili, že na dne studne ostane 75 mincí.

Príklad č. 3 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Ako prvé bolo dôležité všimnúť si, že ak každá opica dostala na začiatku rovnaký počet banánov a potom hodila banán po každej opici okrem seba, mala na konci každá opica rovnako veľa banánov. Čo znamená, že z tých 33 banánov na konci každá opica doniesla rovnakú časť. Ak chceme deliť počet na rovnaké časti, musíme nájsť delitele tohto čísla. Deliteľmi 33 sú 33, 11, 3 a 1. Prejdeme postupne všetky možnosti. Ak by bola iba jedna opica, musela by všetkých 33 banánov doniesť sama. A keďže tam žiadne iné opice neboli, po nikom nič nehádzala a teda na začiatku mala tiež 33 banánov.

Ak by sme mali tri opice, na konci by každá z nich musela doniesť 11 banánov. Keďže sú tri, každá z nich hodila banán po dvoch opiciach. Na začiatku teda mali každá opica 13 banánov, čo je spolu 39.

Rovnakou úvahou zistíme, že ak bolo opíc 11, každá doniesla na konci 3 banány, na začiatku mala 13 banánov a spolu ich mali $11 \cdot 13 = 143$.

A pri 33 opiciach vyšiel 1 banán na opicu na konci, takže každá mala na začiatku 33 banánov a spolu ich mali $33 \cdot 33 = 1089$.

V kŕdli mohla byť 1 opica, ktorej Briana dala 33 banánov, alebo 3 opice, ktoré dostali 39 banánov, alebo 11 opíc, ktoré dostali 143 banánov, alebo 33 opíc, ktoré dostali 1089 banánov.

Príklad č. 4 (opravovali Miška a Aďa Santrové)

Ianovi sa predsa len podarilo vyjadriť všetky prirodzené čísla pomocou týchto kartičiek. Vyzerajú takto:

$0 = (1/2 \div 1/4) - (1/3 \div 1/6)$
$1 = (1/2 - 1/3) \div 1/6 = 1/2 \cdot 1/3 \div 1/6$
$2 = (1/3 \cdot 1/4) \div 1/6 = 1/2 \div 1/4 = 1/3 \div 1/6$
$3 = 1/2 \div 1/6$
$4 = 1/3 \div (1/6 \cdot 1/2) = ((1/2 - 1/3) \div 1/6) \div 1/4$
$5 = ((1/2 - 1/3) \div 1/6) \div 1/5$
$6 = (1/2 \div 1/4) \div 1/3$
$7 = (1/3 + 1/4) \div (1/2 \cdot 1/6)$
$8 = (1/3 \div 1/6) \div 1/4$
$9 = (1/2 \div 1/6) \div 1/3$
$10 = (1/2 \div 1/4) \div 1/5$
$11 = (1/2 + (1/3 \div 1/4)) \div 1/6$
$12 = (1/2 \div 1/6) \div 1/4$
$13 = ((1/2 \div 1/5) - 1/3) \div 1/6$
$14 = ((1/2 \div 1/4) + 1/3) \div 1/6$
$15 = 1/2 \div (1/5 \cdot 1/6)$
$16 = 1/3 \div (1/2 \cdot 1/4 \cdot 1/6) = ((1/3 \div 1/6) \div 1/4) \div 1/2$
$17 = ((1/2 \div 1/5) + 1/3) \div 1/6$
$18 = ((1/3 \div 1/6) + (1/2 \div 1/5)) \div 1/4$
$19 = ((1/4 \div 1/5) + 1/3) \div (1/2 \cdot 1/6)$
$20 = ((1/2 \div 1/4) \div 1/5) \div (1/4 \div 1/2)$