SEZAM, školský rok 2015/16, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Naika, Rudolfus, Ebonika a Horus vám z ďalekého Egypta všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 15. až 24. augusta vo Fačkovskom sedle. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravoval Didi Hudec)

Potrebujeme nájsť také 5-ciferné číslo, ktoré podľa zadanej úlohy spĺňa

```
  1 A B C D E
 +1 A B C D E
 +1 A B C D E
  A B C D E 1
```

Takto ihneď vidíme, že súčet troch rovnakých číslic (namiesto E) má končiť na 1tku. Je to nepárne číslo, čiže mi stačí overiť 1•3, 3•3, 5•3, 7•3 a 9•3. Jedine dvojica 7 • 3 = 21 dáva výsledok končiaci na jednotku. Hľadaná posledná číslica E je teda 7 a dve nám zostali ako zvyšok. Takto pokračujeme s hľadaním číslice miesto písmena D. Keďže mi dve ostali a E = 7 tak hľadám číslo, ktoré keď vynásobíme tromi bude končiť na 5. Opäť teda vyberáme spomedzi nepárnych číslic a jediné vyhovujúce je číslo 5 a jedna nám ostala. C + C + C + 1 sa má končiť na 5, čo opäť platí len keď sa C = 8. Potom B + B + B + 2 sa končí na 8 čomu vyhovuje len B = 2. Ostáva nám posledná neznáma číslica, pre ktorú platí A + A + A sa končí na 2 a zároveň platí súčet aj pre celkový výsledok. Toto spĺňa práve číslo 4.
Dostávame teda výsledok, že hľadané číslo je 42857.

Príklad č. 2 (opravovala Lenka Trojaková)

Máme slamky s dĺžkou 1 až 9 cm, z každej dĺžky 1 kus. Chceme z týchto slamiek postaviť všetky možné štvorce, pričom slamky nemôžeme lámať.

Poďme sa najskôr pozrieť na to, akú najdlhšiu stranu môže takýto štvorec mať. Celkový súčet dĺžok slamiek je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, takže obvod nášho štvorca môže byť najviac 45 cm. Jeho strana môže byť teda najviac 45 ÷ 4 = 11,25 cm. Keďže slamky nemôžeme kúskovať, najväčšia možná strana štvorca je 11 cm.

V ďalšom kroku potrebujeme zistiť, ako rôzne sa dajú slamky nakombinovať na strany štvorca s rôznymi dĺžkami. Tabuľka nižšie ukazuje všetky možnosti, ako sa dajú z našich slamiek vyskladať strany rôznych dĺžok.

Dĺžka										
1	1									
2	2									
3	3	2 + 1								
4	4	3 + 1								
5	5	4 + 1	3 + 2							
6	6	5 + 1	4 + 2	3 + 2 + 1						
7	7	6 + 1	5 + 2	4 + 3	4 + 2 + 1					
8	8	7 + 1	6 + 2	5 + 3	5 + 2 + 1	4 + 3 + 1				
9	9	8 + 1	7 + 2	6 + 3	5 + 4	6 + 2 + 1	5 + 3 + 1	4 + 3 + 2		
10	9 + 1	8 + 2	7 + 3	6 + 4	7 + 2 + 1	6 + 3 + 1	5 + 4 + 1	5 + 3 + 2	4 + 3 + 2 + 1	
11	9 + 2	8 + 3	7 + 4	6 + 5	8 + 2 + 1	7 + 3 + 1	6 + 4 + 1	6 + 3 + 2	5 + 4 + 2	5 + 3 + 2 + 1

Teraz už len potrebujeme zo "strán" v jednotlivých riadkoch vyskladať štvorce tak, aby sme každú slamku použili len jedenkrát.

Vidíme, že strany dĺžky 1 až 5 sa nedajú ani len vyskladať štyrmi rôznymi spôsobmi (na každú stranu štvorca jeden spôsob), a preto neexistuje štvorec so stranou dĺžky menšou ako 6.
Dĺžka 6 už síce má 4 možnosti zloženia, ale ak použijeme slamky 3, 2 a 1 na zloženie jednej strany štvorca, neostane nám už dosť slamiek na zvyšné strany. Takýto štvorec teda nevieme zložiť.
Dĺžka 7 sa dá štyrmi spôsobmi zložiť nasledovne:
7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3. Toto je jeden možný štvorec.
Ak by sme chceli použiť na stranu štvorca slamky 4, 2 a 1, tak nám zo "sedmičkovej dĺžky" zostane už len strana zložená zo slamky s dĺžkou 7 a teda nevieme zložiť ďalší štvorec.

Podobne budeme postupovať pri dĺžke 8. Vieme pre ňu zložiť nasledovný štvorec:
8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3.
Ak by sme použili ľubovoľnú inú z možností v "osmičkovom riadku", neostalo by nám dosť možností na zvyšné strany štvorca.

Pre dlžku 9 nám pri rovnakom postupe (vždy vyberáme štvoricu stĺpcov v danom riadku tak, aby bola každá slamka použitá najviac jeden krát) vznikne 5 rôznych štvorcov:
9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3
9 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4
9 = 8 + 1 = 6 + 3 = 5 + 4
9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 5 + 4
8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4

Pre dĺžku 10 máme len jednu možnosť: 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4
Pre dĺžku 11 máme tiež len jednu možnosť: 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5.
(Ak mi neveríš, skús si vybrať niektoré nepoužité políčko v danom riadku a zakryť všetky, ktoré sa vďaka nemu vylučujú. Zistíš, že nevieš nájsť ďalšie tri strany štvorca, ktoré by sa dali zložiť zo zvyšných slamiek.)
Dohromady máme teda 9 rôznych štvorcov, ktoré vie Naika zložiť zo zápaliek od Rudolfusa.

Príklad č. 3 (*opravoval Mojo Majdiš*)
Na Ahmetovu otázku môže byť správna odpoveď áno alebo nie. Rozoberme si postupne obe tieto možnosti.

Ak je správna odpoveď áno, tak podľa zadania Ahmet musí byť Anorég. Keďže však odpoveď je áno, je pravda čo hovorí. Preto zároveň musia s Isis patriť do rovnakého kmeňa, a teda aj Isis je Anorég.

Ak je správna odpoveď nie, tak opäť podľa definície zo zadania musí byť Ahmet Nieduín. Tentokrát však platí opak jeho tvrdenia a musia byť s Isis z rôznych kmeňov, a teda Isis je Anorég.

Ako vidíme, odpoveď na Ahmetovu otázku s istotou určiť nevieme, takisto ani jeho kmeň. Čo však určiť naisto vieme, je kmeň Isis – tá je určite Anorég. Ja by som Ebonike odporúčal obchodovať s Isis, lebo pri nej naisto vieme, že bude na nás príjemná a priateľská.

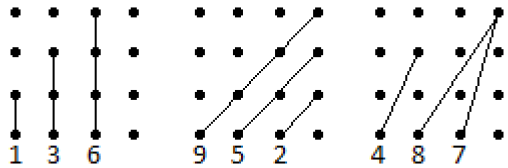
Príklad č. 4 (*opravovala Kayči Čárska*)
Pre tých, ktorí nehádzali (ale aj pre ostatných zvedavcov), som v nasledujúcej tabuľke spočítala pár výsledkov z vašich riešení. Celkovo ste v nich spravili 371 hodov dvomi kockami. V prvom riadku je poradové číslo pokusu, kedy padol prvýkrát súčet 7, v druhom riadku je

počet týchto pokusov. Tabuľka samozrejme pokračuje aj ďalej, hodnoty sa postupne znižujú. Skúste si doma zahádzať a uvidíte, či to platí i pre vaše kocky :-)

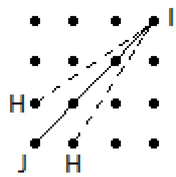
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
64	**58**	**60**	**38**	**33**	**27**	**21**	**16**	**13**	**9**

Už na prvý pohľad vidno, že najvyššie hodnoty nájdeme na začiatku tabuľky – v 1.,2. a 3. hode. Možno to znie neuveriteľne, no najvyššiu šancu máme hodiť súčet 7 hneď na prvý krát. Pozrieme sa teraz spolu na ideálne kocky, na 371 hodov dvomi kockami. Spolu máme 36 možností ako môžeme kocky hodiť (6 na jednej a 6 na druhej). Z nich je 6 možností so súčtom 7 (1 a 6, 2 a 5, 3 a 4, 4 a 3, 5 a 2, 6 a 1). T.j. v jednej šestine hodov by v ideálnom prípade padol súčet 7.
371 hodov dvomi kockami môžeme nahradiť hodom 371 dvojíc kociek (371 • 2). Z nich v ideálnom prípade padne na šestine súčet 7. T.j. v 61,83333... (= 371 ÷ 6) dvojiciach. Ostane nám 309 dvojíc kociek (= 371-62). S nimi opäť hodíme a na nich v ideálnom prípade opäť padne v šestine dvojíc súčet 7. T.j. v tomto druhom kole padne v 51,5 (= 309 ÷ 6) dvojiciach súčet 7. Po tomto druhom kole nám ostane 257 dvojíc, v ktorých súčet 7 nepadol ani v prvom, ani v druhom kole. Keď budeme pokračovať ďalej, počty dvojíc so súčtom 7 sa budú v ideálnom prípade znižovať (62, 52, 43, 36, ...).
Kocky sa však správajú podľa takýchto „pravidiel“ len pri veľmi veľkom počte hodov. Preto viacerí z vás pri experimentovaní dostali odlišný výsledok.

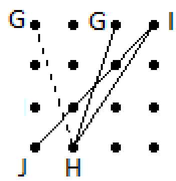
Príklad č. 5 (*opravoval Miro Hudec*)



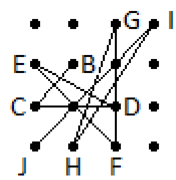
Najprv sa pozrime, koľko rôznych dĺžok máme medzi palmami. Všetky sú znázornené na obrázku, očíslované od najkratšej po najdlhšiu (na porovnanie dĺžok môžeme použiť Pytagorovu vetu alebo kružidlo). Našli sme ich 9, čo je presne potrebný počet na spojenie 10 paliem A až J – takže ich musíme použiť všetky.



Keďže dlhšie pavučiny majú oveľa menej možných polôh ako kratšie, začneme hľadať od konca. Číslo 9 vieme umiestniť iba na 2 miesta (uhlopriečky sadu). To znamená, že palma J bude určite v niektorom z rohov sadu. Keďže sad je symetrický, stačí keď budeme ďalej uvažovať s jedným konkrétnym rohom a výsledný počet rozmiestnení na konci vynásobíme číslom 4 (sad má 4 rôzne rohy).
Je to zobrazené na obrázku plus tu vidíme aj dve možné umiestnenia pavučiny 8 (prerušovanou čiarou). Opäť si vyberieme jednu z nich a na konci potom vynásobíme počet rozmiestení číslom 2.



Pre pavučinu 7 máme opäť dve možnosti. Tú čiarkovanú ale nemôžeme použiť, lebo pavučina 6 by potom viedla na palmu I alebo J a to nemôže. Následne máme pre pavučiny 6, 5, 4, 3 a 2 vždy len jednu možnosť, takže keď ju použijeme bude to vyzerať ako na poslednom obrázku.



Pre palmu A máme 3 možnosti, konkrétne dolný, pravý alebo horný sused palmy B. Takže pre celkový možný počet pavučín potrebuje spraviť nasledovné násobenie:
3 • 2 • 4 = 24 možností.

Príklad č. 6 **(***opravoval Samo Tamašec*)

Ako prvé po tom, čo si prečítame zadanie, by mohlo byť to, že si začneme vypisovať nepárne čísla. Fajn nápad to je preto, lebo jediné párne prvočíslo je 2 a tým, že je jediné, tak číslo p+2 ani p+4 už prvočíslo nebude. Tu ich niekoľko máme. Zvýrazním medzi nimi prvočísla: 1, **3**, **5**, **7**, 9, **11**, **13**, 15, **17**, **19**, 21, **23**, 25, 27, **29**, **31**, 33.

Rovno si môžeme všimnúť, že jednu prvočíselnú trojičku sme rovno našli (3, 5, 7). No potom to už akoby nešlo: 11, 13 a predtým, ako povieme hurá pri 15 si uvedomíme deliteľnosť číslom 3 a 5. Potom píšem: 17, 19... a zrazu 21 – to je deliteľné číslami 3 a 7. A znovu: 29, 31... a 33 nám to pokazila. Znovu si napíšme deliteľov tohto čísla: 3 a 11. Akoby nám to tá 3 robila naschvál, že nám to vždy pokazí. Aspoň, že pri 3, 5 a 7 nám to nepokazila, lebo tam je tá trojka prvočíslom. Akoby v každej trojici p, p+2 a p+4 muselo byť jedno z týchto čísel deliteľné trojkou.

Poďme sa pozrieť bližšie. Nech číslo p je prvočíslom (iným ako 3). Číslo p teda nie je deliteľné trojkou. Ak ale číslo p nie je deliteľné trojkou, tak musí byť číslo p+2 alebo p+4 deliteľné 3. Je to preto, že každé tretie číslo je deliteľné tromi.

Ak je číslo p prvočíslo a aj číslo p+2 prvočíslo, tak nám vychádza, že jedine p+1 musí byť deliteľné 3. Ak však p+1 je deliteľné 3, tak ním je deliteľné aj o 3 väčšie číslo p+4, a teda nie je prvočíslom. Ale pozor, to je spor s našim zadaním!

Podľa zadania p+4 musí byť prvočíslo. Čo nám z tohto vyplýva? Ak naše kroky boli správne (čo boli), tak musí byť nesprávny predpoklad. Ten predpoklad je, že p, p+2 aj p+4 sú prvočíslo.

Je však pravda, že pokiaľ by sme za číslo p dosadili rovno číslo 3, tak máme riešenie. Je to preto, lebo číslo 3, ako sme už písali, je prvočíslo. Pokiaľ by sme trojku dosadili za p+2 a p+4, nedostali by sme novú prvočíselnú trojičku, veď nech si skúsi každý sám (jednotka prvočíslom nie je).